Exercice 1. `[14 pts]` **Antilles-Guyane 2011**

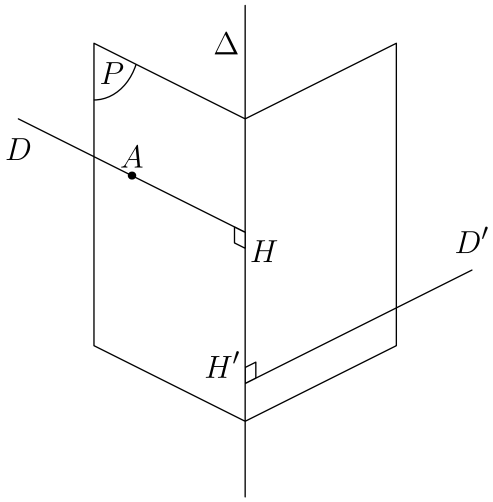
L'espace est rapporté au repère $(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$.

On considère la droite D passant par le point $A(3\,,-4\,,1))$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\,,-3\,,1)$.

On considère la droite D' dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= -1-t \\ y &= 2+t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z &= 1-t \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique droite Δ qui est perpendiculaire aux droites D et D' .
On note H le point d'intersection des droites D et Δ .
On note H' le point d'intersection des droites D' et Δ .
On appelle P le plan contenant les droites D et Δ .
On admet que le plan P et la droite D' se coupent en H'.



1. On considère $\vec{w}(1\,,0\,,-1)$.
Montrer que $\vec{w}$ est un vecteur directeur de Δ.

2. Soit $\vec{n}(3\,,2\,,3)$.
   a) Démontrer que $\vec{n}$ est normal au plan P .
   b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est
$$3x + 2y + 3z - 4 = 0$$

3. **a)** Démontrer que les coordonnées de H' sont $(-1\,,2\,,1)$.
   b) En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ

4. **a)** Déterminer les coordonnées du point H .
   b) En déduire la distance HH'

Exercice 2. `[6 pts]`

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1.
L'espace est rapporté au repère $(A\,,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$.

1. Montrer q'une équation du plan (BDE) est $x + y + z = 1$

2. Donner une représentation paramétrique de la diagonale (AG)

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de (AG) et de (BDE)

4. Montrer que $AI = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice 1. Antilles-Guyane 2011

1. On vérifie que $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{u}$:
$$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} = 1 \times 1 + 0 \times -3 + -1 \times 1 = 0$$
La droite D' admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}(-1\,,1\,,-1)$
On vérifie alors que $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{v}$:
$$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = 1 \times -1 + 0 \times 1 + -1 \times -1 = 0$$
Donc $\overrightarrow{w}$ est vecteur directeur de toute droite orthogonale à D et à D'. en particulier de Δ.

2. **a)** Les deux droites (D) et (Δ) sont deux droites de (P).
Elles sont sécantes car leurs vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}(1\,,-3\,,1)$ et $\overrightarrow{w}(1\,,0\,,-1)$ ne sont pas colinéaires.
On vérifie que $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u}$:
$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 3 \times 1 + 2 \times -3 + 3 \times 1 = 0$$
On vérifie ensuite que $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{w}$:
$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{w} = 3 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times -1 = 0$$
$\overrightarrow{n}$ est normal au plan P puisqu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

   b) On sait que $A \in P$.
Un point $M(x\,,y\,,z)$ appartient au plan lorsque
$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \iff 3(x-3) + 2(y+4) + 3(z-1) = 0$$
Le plan P admet pour équation $3x + 2y + 3z - 4 = 0$

3. **a)** Le paramètre t correspondant au point H' vérifie :
$$3(-1-t) + 2(2+t) + 3(1-t) - 4 = 0 \iff -4t = 0 \iff t = 0$$
Les coordonnées de H' sont donc $(-1\,,2\,,1)$.

   b) La droite Δ passe par H' et admet $\overrightarrow{w}$ comme vecteur directeur.
Une représentation paramétrique de Δ est donc
$$\begin{cases} x &= -1 + u \\ y &= 2 \qquad u \in \mathbb{R} \\ z &= 1 - u \end{cases}$$

4. **a)** On écrit une représentation paramétrique de D :
$$\begin{cases} x &= 3 + t \\ y &= -4 - 3t \qquad u \in \mathbb{R} \\ z &= 1 + t \end{cases}$$
On sait que les coordonnées de H vérifient les systèmes qui représentent D et Δ :
$$\begin{cases} 3 + t &= -1 + u \\ -4 - 3t &= 2 \qquad u \in \mathbb{R} \\ 1 + t &= 1 - u \end{cases}$$
On déduit de la deuxième ligne $t = -2$, et en reportant cette valeur, on vérifie $u = 2$
Les coordonnées de H sont $(1\,,2\,,-1)$.

   b) $HH' = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (1--1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Exercice 2. `[6 pts]`

1. Les points B, D et E ne sont pas alignés : ils déterminent un plan.
Leurs coordonnées sont $B(1\,,0\,,0)$, $D(0\,,1\,,0)$ et $E(0\,,0\,,1)$.
Dans les trois cas, l'équation $x + y + z = 1$ est vérifiée.
(BDE) est donc le plan d'équation $x + y + z = 1$

2. La diagonale (AG) passe par $A(0\,,0\,,0)$ et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AG}(1\,,1\,,1)$. Une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= t \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= t \end{cases}$$

3. Le paramètre qui correspond au point d'intersection I vérifie :

$$t + t + t = 1 \iff t = \frac{1}{3}$$

Ce point est donc $I\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

4. $AI = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$