

Exercice 1. [10 pts] Loi exponentielle

La durée de vie d'un lave-linge (en années) peut être modélisée par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

Une étude statistique montre qu'au bout de 7 ans, 60% des lave-linges sont en état de fonctionnement.

1. Montrer que les données se traduisent par $e^{-7\lambda} = 0,6$

Donner la valeur de λ arrondie à 10^{-3}

2. a) Calculer la probabilité qu'un lave-linge ait une durée de vie inférieure à 6 mois
 b) Calculer la probabilité qu'un lave-linge ait une durée de vie supérieure ou égale à 10 ans
3. a) Calculer la demi-vie, c'est-à-dire le nombre d'années t tel que

$$p(T < t) = p(T \geq t)$$

b) Calculer l'espérance de vie d'un lave-linge

4. Dans cette question, on note $p = P(T \geq 10)$ et $q = 1 - p$.

Le propriétaire d'une laverie veut installer n lave-linges et il souhaite que *la probabilité d'avoir au moins un lave-linge qui dépasse 10 ans soit supérieure à 0,9*.

On suppose que deux lave-linges tombent en panne de façon indépendante. Montrer que cette condition se traduit par :

$$1 - q^n \geq 0,9$$

Combien de lave-linges faut-il installer ?

Exercice 2. [10 pts] Loi normale

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(125 ; 0,3)$.

a) Donner l'espérance μ et l'écart-type σ de X

b) Justifier que $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ peut être approchée par la loi normale centrée réduite

c) Calculer $P(X > 35)$

d) Calculer a tel que $P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0,9$

2. On admet que la proportion de femmes dans la population française est 51,4%.

a) On constitue un échantillon de 40 personnes et on note f la proportion de femmes dans cet échantillon.

Dans quel intervalle fluctue f avec une probabilité de 0,95 ?

b) On observe dans une classe 16 filles et 24 garçons : peut-on dire que les filles sont sous-représentées dans cette classe ?

3. Un sac contient une grande quantité de billes rouges et bleues.

Pour estimer la proportion p de billes rouges, on extrait un échantillon de 50 billes dans lequel on observe 13 billes rouges

a) Quelle loi est suivie par le nombre de billes rouges ? Quelle approximation de cette loi peut-on proposer ?

b) Donner une estimation de p à l'aide d'un intervalle de confiance au niveau 0,95.

Exercice 1. [10 pts] Loi exponentielle

1. D'après le cours $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$.

$$\text{Donc } P(T \geq 7) = 0,6 \iff e^{-7\lambda} = 0,6$$

$$\text{Cette équation est équivalente à } \lambda = \frac{\ln 0,6}{-7} \approx \boxed{0,073}$$

2. a) $P(T < 0,5) = 1 - e^{-0,0365} \approx \boxed{0,036}$

b) $P(T \geq 10) = e^{-0,73} \approx \boxed{0,48}$

3. a) $1 - e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \iff e^{-\lambda t} = 0,5 \iff t = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \boxed{9,5}$

b) $E(X) = \frac{1}{\lambda} \approx \boxed{13,7}$

4. On sait $p = 0,48$ et $q = 0,52$.

L'hypothèse d'indépendance implique que la probabilité qu'aucun lave-linge ne fonctionne au bout de 10 ans est q^n .

Donc la probabilité qu'au moins un lave-linge fonctionne au bout de 10 ans est $1 - q^n$.

$$1 - q^n \geq 0,9 \iff n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,52} \approx 3,52$$

Il faut donc installer au moins 4 lave-linges.

Exercice 2. [10 pts] Loi normale

1. a) $\boxed{\mu = 37,5}$ et $\boxed{\sigma = 5,12}$

b) On vérifie $125 \geq 30$ ainsi que $125 \times 0,7 \geq 125 \times 0,3 \geq 5$

On peut donc appliquer Moivre-Laplace

c) $P(X > 35) = P(Z > -0,49) \approx \boxed{0,69}$

d) On vérifie $\mu - a \leq X \leq \mu + a \iff -\frac{a}{\sigma} \leq Z \leq \frac{a}{\sigma}$

La parité de la densité de la loi normale centrée réduite implique

$$P\left(-\frac{a}{\sigma} \leq Z \leq \frac{a}{\sigma}\right) = 0,9 \iff P\left(Z \leq \frac{a}{\sigma}\right) = 0,95$$

La calculatrice donne $\frac{a}{\sigma} \approx 1,64$ et donc $a \approx \boxed{8,42}$

2. a) Intervalle de centre $p = 0,514$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{40}} \approx 0,158$

La probabilité que f soit dans $[0,356 ; 0,669]$ dépasse 0,95

b) On calcule $f = \frac{16}{40} = 0,4 \in [0,356 ; 0,669]$: on peut donc dire que les filles ne sont pas sous-représentées

3. a) Le nombre de billes rouges suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et p inconnue

On peut approcher cette loi par une loi normale de paramètres $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

b) Un intervalle de confiance au niveau 0,95 dans lequel se trouve p est $[0,12 ; 0,40]$.