Exercice 1. `[6 pts]` **Probabilités conditionnelles**

Dans cet exercice, on étudie l'expérience aléatoire suivante. On dispose d'un dé bien équilibré et de deux urnes :
- l'urne A contient 2 boules rouges et 1 boule noire
- l'urne B contient 1 boule rouge et 2 boules noires

Dans un premier temps on lance le dé. Si le nombre obtenu est strictement inférieur à 3, on choisit une boule au hasard dans l'urne A. Sinon, on choisit une boule au hasard dans l'urne B.
On considère les événements suivants :

A : « *après le lancer du dé, l'urne A est choisie* »
B : « *après le lancer du dé, l'urne B est choisie* »
R : « *la boule obtenue est de couleur rouge* »
N : « *la boule obtenue est de couleur noire* »

1. Par lecture du texte, donner $P(A)$ et $P_B(R)$.
Représenter les données par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité de l'événement « *A et R* » . Calculer $P(R)$

3. Sachant qu'on vient de tirer une boule rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne A ?

4. Reproduire et compléter le tableau à double entrée suivant :

	A	B	Total
R			
N			
Total			

Peut-on affirmer que les événements A et R sont indépendants et pourquoi ?

Exercice 2. `[4 pts]` **Algorithmique**

Les données de cet exercice sont les mêmes que celles de l'exercice 1.

1. Écrire le pseudo-code d'un algorithme permettant de simuler cette expérience aléatoire.
On conviendra que la fonction :

NOMBRE_ENTIER_ENTRE (a , b)

permet de choisir un nombre entier au hasard entre a et b .

2. Une partie est dite « *gagnante* » lorsqu'on obtient une boule rouge. Modifier l'algorithme précédent de sorte que :
- l'utilisateur donne au départ le nombre n de parties qui doivent être simulées
- l'algorithme affiche en sortie la proportion de parties gagnantes

Exercice 3. `[5 pts]` **Variables aléatoires**

Un groupe d'élèves comprend 6 garçons et 4 filles. Chaque jour de la semaine, on désigne un représentant de ce groupe en choisissant un élève au hasard. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où une fille a été désignée.

1. Sachant que la semaine va du lundi au vendredi, quelle loi de probabilité est suivie par X ?
En déduire l'espérance et la variance de X .

2. L'expérience est étendue au-delà de la semaine : on désigne un représentant au hasard pendant n jours de l'année ($n > 5$).
À partir de quelle valeur de n la probabilité d'avoir choisi au moins une fois une fille dépasse 0,99 ?

Exercice 4. `[5 pts]` **Calcul intégral**

1. Déterminer l'aire sous la courbe de la fonction sinus sur $[0\,,\pi]$.
   En déduire la valeur moyenne du sinus sur cet intervalle.
2. Calculer les intégrales définies suivantes :
   a) $\displaystyle\int_1^e \ln x\ \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$
   b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\ \mathrm{d}x$
   c) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)\ e^{x^2+2x}\ \mathrm{d}x$

Exercice 1. Probabilités conditionnelles

1. Le dé étant bien équilibré, $P(A) = \dfrac{1}{3}$ et le tirage se faisant au hasard $P_B(R) = \dfrac{1}{3}$.

2. L'événement « A et R » se note aussi A ∩ R et sa probabilité est :

$$P(A) \cdot p_A(R) = \frac{2}{9}$$

L'événement R est la réunion disjointe de A ∩ R et de B ∩ R :

$$P(R) = P(A) \cdot p_A(R) + P(B) \cdot p_B(R) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

3. Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{2/9}{4/9} = \frac{1}{2} = 0,5$$

4. Tableau à double entrée :

	A	B	Total
R	2/9	2/9	4/9
N	1/9	4/9	5/9
Total	1/3	2/3	1

Les événements A et R ne sont pas indépendants :

$$P(A \cap R) = \frac{2}{9} \text{ et } P(A)\ P(R) = \frac{4}{27} \text{ sont différents}$$

Exercice 2. Algorithmique

1.

```
VARIABLES
   u et v sont des nombres
DÉBUT de l'ALGORITHME
   u prend la valeur NOMBRE_ENTIER_ENTRE(1 , 6)
   SI u < 3 ALORS
      v prend la valeur NOMBRE_ENTIER_ENTRE(1 , 3)
      SI v < 3 ALORS afficher "Rouge"
      SINON afficher "Noir"
      FIN de SI
   SINON
      v prend la valeur NOMBRE_ENTIER_ENTRE(1 , 3)
      SI v = 1 ALORS afficher "Rouge"
      SINON afficher "Noir"
      FIN de SI
   FIN de SI
FIN de l'ALGORITHME
```

2.

```
VARIABLES
   i , n , f , g , u et v sont des nombres
DÉBUT de l'ALGORITHME
   LIRE n
   POUR i ALLANT DE 1 À n
      u prend la valeur NOMBRE_ENTIER_ENTRE(1 , 6)
      SI u < 3 ALORS
         v prend la valeur NOMBRE_ENTIER_ENTRE(1 , 3)
         SI v < 3 ALORS g PREND la VALEUR g + 1
```

```
            SINON
               v prend la valeur NOMBRE_ENTIER_ENTRE(1 , 3)
               SI v = 1 ALORS g PREND la VALEUR g + 1
            FIN de SI
         FIN de POUR
         f PREND la VALEUR g / n
         AFFICHER f
      FIN de l'ALGORITHME
```

Exercice 3. Variables aléatoires

1. On est dans la situation du schéma de Bernoulli : la même expérience est répétée et les résultats sont supposés indépendants.
Si on appelle « *succès* » l'événement qui consiste à choisir une fille, sa probabilité est 0,4 .
Par conséquent, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,4$. D'après le cours :

$$E(X) = 5 \times 0,4 = 2 \text{ et } V(X) = 5 \times 0,4 \times 0,6 = 1,2$$

2. On calcule d'abord la probabilité de l'événement :

$(X \geq 1)$: « *on a choisi au moins une fois une fille* »

On peut remarquer que l'événement contraire est :

$(X = 0)$: « *on n'a choisi que des garçons* »

On a donc $p(X = 0) = 0,6^n$ puis $p(X \geq 1) = 1 - 0,6^n$.
Il s'agit maintenant de résoudre :

$$\begin{aligned} 1 - 0,6^n \geq 0,99 &\iff 1 - 0,99 \geq 0,6^n \\ &\iff 0,01 \geq 0,6^n \\ &\iff \ln 0,01 \geq n \ \ln 0,6 \\ &\iff \frac{\ln 0,01}{\ln 0,6} \leq n \end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,6} \approx 9,015$, la condition est réalisée pour tout entier $n \geq 10$.

Exercice 4. Calcul intégral

1. $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \ \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 2$

La valeur moyenne est donc $m = \dfrac{2}{\pi - 0} = \boxed{\dfrac{2}{\pi}}$

2. a) On pose $u(x) = \ln x$ de façon à pouvoir écrire :

$$f(x) = \ln x \ \frac{1}{x} = u(x) \ u'(x)$$

Une primitive de cette fonction est alors :

$$F(x) = \frac{u^2(x)}{2} = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

Et finalement $\displaystyle\int_1^e \ln x \, \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{(\ln e)^2 - (\ln 1)^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

b) On pose $u(x) = \sin x$ de façon à pouvoir écrire :

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Puisque $u > 0$ sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, une primitive de cette fonction est :

$$F(x) = \ln[u(x)] = \ln(\sin x)$$

On en déduit $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} \, \mathrm{d}x = \ln 1 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\ln \sqrt{2}}$

c) On pose $u(x) = x^2 + 2x$ de façon à pouvoir écrire :

$$f(x) = (x+1) \, e^{x^2+2x} = \frac{1}{2} \, u'(x) \, e^{u(x)}$$

Une primitive de cette fonction est alors :

$$F(x) = \frac{1}{2} \, e^{u(x)} = \frac{1}{2} \, e^{x^2+2x}$$

On en déduit $\displaystyle\int_0^1 (x+1) \, e^{x^2+2x} \, \mathrm{d}x = \boxed{\frac{e^3 - 1}{2}}$