Exercice 1. `[5 pts]` **Équations**

On se propose d'étudier les solutions de l'équation (E) $z^3+1=0$

1. Vérifier que pour tout nombre complexe z, on a :
$$z^3+1=(z+1)(z^2-z+1)$$
2. En déduire les solutions de (E) .
Donner chaque résultat sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

3. Placer les images A, B et C de ces solutions sur une figure en tenant compte des renseignements suivants :
- l'affixe a de A est un réel
- l'affixe b de B est un nombre complexe dont la partie imaginaire est strictement positive

4. Montrer que ABC est un triangle équilatéral et que O est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Exercice 2. `[5 pts]` **Forme exponentielle**

1. On considère $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2=e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$

a) Mettre sous forme algébrique z_1 et z_2.
b) En déduire la forme algébrique de Z
c) Mettre Z sous forme exponentielle : que peut-on en déduire pour le cosinus et le sinus de $\dfrac{\pi}{12}$?

2. On note $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

a) Mettre z sous forme exponentielle.
b) En déduire la forme exponentielle puis la forme algébrique de z^{2013}
c) Soit n un entier naturel : pour quelles valeurs de n le nombre z^n est réel ?

Exercice 3. `[10 pts]` **Lieux**

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O\,,\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v})$, on note A et B les points d'affixes respectives $a=3-i$ et $b=i$.
On note C le milieu du segment $[AB]$ et M un point quelconque du plan d'affixe $z=x+iy$ (x et y réels) .
On se propose d'étudier de deux façons différentes le quotient
$$Z=\frac{z-b}{z-a}$$
1. Figure.
Placer les points A , B et C. Construire le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$. Construire la droite (AB) puis la droite (Δ) médiatrice du segment $[AB]$.

2. Déterminer l'affixe c du point C.
Vérifier que si $z=\dfrac{9}{2}-2i$, alors Z est un réel.
Vérifier que si $z=3+i$, alors Z est un imaginaire pur.

3. Déterminer le nombre complexe z qui est tel que $Z=i$.

4. Dans cette question, on étudie l'expression de Z en fonction des réels x et y :
$$Z=\frac{(x+iy)-i}{(x+iy)-(3-i)}$$

a) Déterminer la partie réelle puis la partie imaginaire de Z

b) En déduire une équation de l'ensemble des points M tels que le quotient Z est un réel. Préciser l'ensemble obtenu.

c) De manière analogue, déterminer l'ensemble des points M tels que le quotient Z est un imaginaire pur.

5. Solution géométrique.

a) Montrer que Z est le quotient des affixes de deux vecteurs.

b) Quelle propriété géométrique est vérifiée par ces vecteurs lorsque Z est réel ? lorsque Z est imaginaire pur ?

c) Retrouver les résultats de la question précédente.

6. Déterminer l'ensemble des points M tels que Z est un nombre complexe de module 1.

Exercice 1. Équations

1. On développe :

$$(z+1)(z^2-z+1) = z^3+z^2-z^2-z+z+1 = z^3+1$$

2. L'équation (E) est donc équivalente à $z+1=0$ ou $z^2-z+1=0$.
La première équation a une solution $z_0=-1$.
Le discriminant de la deuxième équation est

$$\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times 1 = -3$$

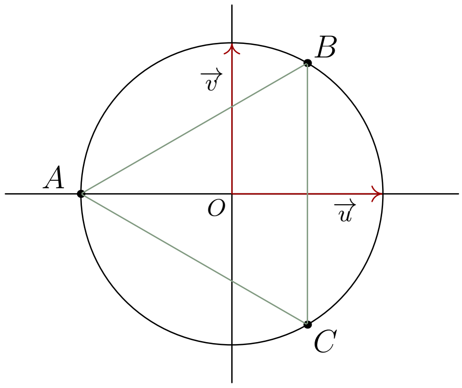
Elle a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

L'équation (E) a par conséquent trois solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont z_0, z_1 et z_2.
On peut écrire :

$$z_0 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$$
$$z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$
$$z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

3. <u>Figure</u>



4. On va calculer les trois côtés de ABC :

$$AB = |b-a| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right| = \left|\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$
$$AC = |c-a| = \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right| = \left|\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$
$$CB = |b-c| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$$

Le triangle ABC est donc équilatéral.
On peut alors remarquer que $|a|=|b|=|c|=1$, ce qui se traduit par $OA=OB=OC=1$.
Le point O est donc le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Exercice 2. Forme exponentielle

1. a) Formes algébriques

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$
$$z_2 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$$

b) Calcul de Z sous forme algébrique :

$$Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$$
$$= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

c) Calcul de Z sous forme exponentielle :

$$Z = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

On en déduit :

$$\cos\frac{\pi}{12} = R\acute{e}(Z) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin\frac{\pi}{12} = Im(Z) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

2. a) Soit r le module de z :

$$r = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$$

Soit θ un argument de z :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff \theta = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi$$

On en déduit $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) On obtient : $z^{2013} = e^{i\,\frac{2013\pi}{4}}$.

On écrit alors : $2013 = 251 \times 8 + 5$, ce qui implique :

$$\frac{2013\pi}{4} = 251 \times 2\pi + \frac{5\pi}{4}$$

Un autre argument de z^{2013} est donc $\frac{5\pi}{4}$:

$$z^{2013} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

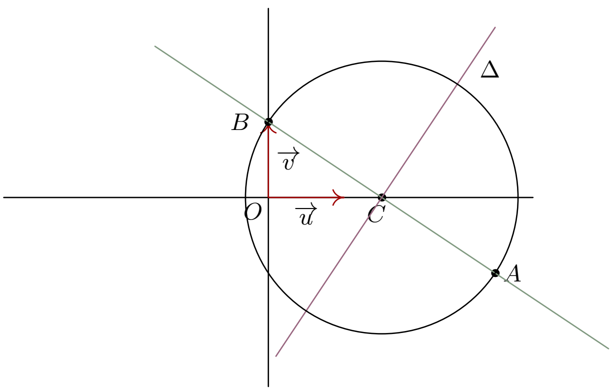
c) Le nombre z^n a pour argument $\frac{n\pi}{4}$ et ce nombre est un réel lorsque :

$$\frac{n\pi}{4} = k\pi \qquad \text{où} \quad k \in Z$$

Cette condition est équivalente à $n = 4k$: il faut donc que n soit un multiple de 4 .

Exercice 3. Lieux

1. <u>Figure.</u>



2. Affixe du point C : $c = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{3}{2}$

Si $z = \dfrac{9}{2} - 2i$: $Z = \dfrac{\frac{9}{2} - 2i - i}{\frac{9}{2} - 2i - 3 + i} = \dfrac{\frac{9}{2} - 3i}{\frac{3}{2} - i} = 3$

Le nombre Z est alors un réel.

Si $z = 3 + i$: $Z = \dfrac{3 + i - i}{3 + i - 3 + i} = \dfrac{3}{2i} = \dfrac{-3i}{2}$

Le nombre Z est alors un imaginaire pur.

3. On cherche maintenant à résoudre pour $z \neq 3 - i$ l'équation

$$\begin{aligned} Z = i &\iff \frac{z-i}{z-3+i} = i \\ &\iff z - i = iz - 3i - 1 \\ &\iff (1-i)z = -2i - 1 \\ &\iff z = \frac{-1-2i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} \\ &\iff z = \frac{1-3i}{2} \end{aligned}$$

4. a) Calcul de Z sous forme algébrique

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(x+iy) - i}{(x+iy) - (3-i)} \\ &= \frac{x + i(y-1)}{(x-3) + i(y+1)} \times \frac{(x-3) - i(y+1)}{(x-3) - i(y+1)} \\ &= \frac{[x(x-3) + (y-1)(y+1)] + i\,[(x-3)(y-1) - x(y+1)]}{(x-3)^2 + (y+1)^2} \end{aligned}$$

On en déduit les parties réelle et imaginaire de Z :

$$Ré(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 3x - 1}{(x-3)^2 + (y+1)^2}$$

$$Im(Z) = \frac{-2x - 3y + 3}{(x-3)^2 + (y+1)^2}$$

b) Les points M tels que le quotient Z est un réel ont des coordonnées qui vérifient :

$$Im(Z) = 0 \iff \begin{cases} -2x - 3y + 3 = 0 \\ (x\,,y) \neq (3\,,-1) \end{cases}$$

On obtient la droite d'équation $-2x - 3y + 3 = 0$ privée du point de coordonnées $(3\,,-1)$.
Cette droite passe par A car

$$-2x_A - 3y_A + 3 = -2 \times 3 - 3 \times -1 + 3 = 0$$

Elle passe également par B car

$$-2x_B - 3y_B + 3 = -2 \times 0 - 3 \times 1 + 3 = 0$$

L'ensemble cherché est donc la droite (AB) privée de A.

c) Les points M tels que le quotient Z est un imaginaire pur ont des coordonnées qui vérifient :

$$Ré(Z) = 0 \iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 3x - 1 = 0 \\ (x\,,y) \neq (3\,,-1) \end{cases}$$

On obtient le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 3x - 1$ privé du point de coordonnées $(3\,,-1)$.
On peut écrire l'équation du cercle sous la forme suivante :

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{13}{4}$$

Les coordonnées du centre du cercle sont $\left(\dfrac{3}{2}\,;0\right)$: il s'agit du point C .

Le rayon de ce cercle est $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

On peut remarquer que ce cercle passe par A et par B car

$$x_A^2 + y_A^2 - 3x_A - 1 = 3^2 + (-1)^2 - 3 \times 3 - 1 = 0$$
$$x_B^2 + y_B^2 - 3x_B - 1 = 0^2 + 1^2 - 3 \times 0 - 1 = 0$$

Comme C est le milieu de $[AB]$, l'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A.

5. Solution géométrique

a) On peut écrire $Z = \dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A} = \dfrac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}}$

b) Lorsque $M \neq A$, on sait que Z est réel lorsque

$$Z = 0 \quad \text{ou alors} \quad Z \neq 0 \text{ et } \arg Z = k\pi$$

De même Z est imaginaire pur lorsque

$$Z = 0 \quad \text{ou alors} \quad Z \neq 0 \text{ et } \arg Z = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

c) Le nombre Z est réel lorsque $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires : M décrit la droite (AB).

Le nombre Z est imaginaire pur lorsque $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux : M décrit le cercle de diamètre $[AB]$.

Dans les deux cas, le point A doit être exclu car pour $z = a$, Z n'est pas défini. Dans les deux cas, le point B doit être conservé car pour $z = b$, on obtient $Z = 0$ qui est à la fois réel et imaginaire pur.

6. La condition $|Z| = 1$ se traduit par

$$\frac{BM}{AM} = 1 \iff BM = AM$$

L'ensemble cherché est la médiatrice (Δ) du segment $[AB]$.