Exercice 1. `[6 pts]` **Restitution de connaissances**

On note (C) la courbe représentative du logarithme népérien et (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

1. Démontrer que la droite (T) admet pour équation $y = x - 1$

2. En utilisant la calculatrice, conjecturer la position relative de (T) et de (C)

3. On pose pour tout $x > 0$: $f(x) = x - 1 - \ln x$

- **a)** Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$
- **b)** Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. En déduire les variations de f
- **c)** Montrer que l'étude précédente permet de justifier la conjecture faite à la deuxième question.

Exercice 2. `[4pts]` **Résolution d'une inéquation.**

On se propose de résoudre l'inéquation

$$2\ln(5 - x) < \ln(x^2 + x - 2)$$

où x est une inconnue réelle.

1. Déterminer les racines du trinôme $x^2 + x - 2$.
Indiquer dans un tableau le signe de $x^2 + x - 2$ puis le signe de $5 - x$

2. En déduire l'ensemble des réels pour lesquels l'inéquation de départ est définie.

3. Résoudre cette inéquation en utilisant le résultat suivant du cours :

$$\text{pour tout } a > 0 : \ln(a^2) = 2\ln(a)$$

Exercice 3. `[8 pts]` **Un problème de distance minimale .**

PARTIE A

On pose pour tout $x > 0$: $g(x) = x^2 + \ln x$

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$

2. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

3. En déduire les variations de g.

4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule.
Donner un encadrement de α au centième.

5. En déduire le signe de g.

PARTIE B

On pose pour tout $x > 0$: $f(x) = x^2 + (\ln x)^2$

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

2. Déduire de la partie A les variations de f.

3. Donner une valeur approchée du minimum atteint par cette fonction.

PARTIE C

Dans cette partie, on note M un point de la courbe du logarithme népérien.
Ses coordonnées étant notée x et $\ln x$, montrer que la distance entre le point M et le point O , origine du repère, est minimale lorsque $x = \alpha$.

Exercice 4. `[2 pts]` **Suites.**

On pose pour tout entier n :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

1. Montrer que la suite (u_n) tend vers 2.

2. Déterminer le plus petit entier pour lequel la distance de u_n à 2 est inférieure à 10^{-6}.

Exercice 1. Restitution de connaissances

1. On sait que la dérivée du logarithme est la fonction inverse, ce qui implique $\ln' 1 = \dfrac{1}{1} = 1$.
On sait par ailleurs que $\ln 1 = 0$. La droite (T) a donc pour équation :
$$y = \ln'(1) \times (x-1) + \ln 1 \iff \boxed{y = x - 1}$$

2. La droite (T) paraît être au-dessus de la courbe (C).

3. a) Sachant $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, on obtient $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$
En $+\infty$, la forme de l'énoncé est indéterminée. On met x en facteur :
$$f(x) = x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$$
D'après le cours (*croissance comparée*) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
On en déduit par somme puis par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) Calcul de la dérivée : $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

Puisque $x > 0$, cette dérivée est du signe de $x - 1$: $\begin{cases} 0 < x < 1 & \Rightarrow f'(x) < 0 \\ x = 1 & \Rightarrow f'(x) = 0 \\ 1 < x & \Rightarrow f'(x) > 0 \end{cases}$

D'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

c) Le minimum de f est $f(1) = 0$.
On en déduit pour tout $x > 0$: $f(x) \geq 0 \iff x - 1 \geq \ln x$
La droite (T) est donc au-dessus de la courbe (C) .

Exercice 2. Résolution d'une inéquation.

1. Le discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times -2 = 9 > 0$. Les deux racines réelles sont
$$\frac{-1-3}{2} = -2 \quad \text{et} \quad \frac{-1+3}{2} = 1$$
Le signe de $x^2 + x - 2$ est donné par le théorème sur le signe du trinôme. On en déduit :

x	$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
$x^2 + x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$5 - x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	

2. L'inéquation est définie lorsqu'on a simultanément $x^2 + x - 2$ et $5 - x$ strictement positifs, c'est-à-dire sur $D =]-\infty\,; -2[\cup]1\,; 5[$

3. Pour tout $x \in D$, l'inéquation est équivalente à :
$$\begin{aligned} & \ln\left[(5-x)^2\right] < \ln(x^2 + x - 2) \\ \iff & 25 - 10x + x^2 < x^2 + x - 2 \\ \iff & 27 < 11x \\ \iff & \frac{27}{11} < x \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est donc $\left]\dfrac{27}{11}\,; 5\right[$

Exercice 3. Un problème de distance minimale .

PARTIE A

1. On sait $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$.
En $+\infty$, on peut lever l'indétermination en mettant x en facteur :

$$g(x) = x\left(x + \frac{\ln x}{x}\right)$$

D'après le cours (*croissance comparée*) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
On en déduit par somme puis par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2. Calcul de la dérivée : $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$
Cette dérivée est strictement positive en tant que somme de deux termes strictement positifs.

3. La fonction g est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	
$g(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. La fonction g est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$; l'intervalle image est $]-\infty\,;+\infty[$ et il contient 0 .
Par conséquent l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule dans $]0\,;+\infty[$.
Un encadrement de α est obtenu par balayage.
$g(0,6) \approx -0,15 < 0$ et $g(0,7) \approx 0,13 > 0 \Rightarrow 0,6 < \alpha < 0,7$
$g(0,65) \approx -0,01 < 0$ et $g(0,66) \approx 0,02 > 0 \Rightarrow \boxed{0,65 < \alpha < 0,66}$

5. D'après les variations de g :

$$\begin{cases} 0 < x < \alpha & \Rightarrow g(x) < 0 \\ x = \alpha & \Rightarrow g(x) = 0 \\ \alpha < x & \Rightarrow g(x) > 0 \end{cases}$$

On peut résumer la situation dans le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

PARTIE B

1. Calcul de la dérivée :

$$f'(x) = 2x + 2\frac{\ln x}{x} = \frac{2(x^2 + \ln x)}{x} = \frac{2g(x)}{x}$$

Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ où $x > 0$, $f'(x)$ est bien du signe de $g(x)$.

2. On a étudié le signe de g en **A 5.** D'où les variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

3. La fonction f admet pour minimum $f(\alpha) \approx f(0,655) \approx 0,608$.

PARTIE C

Le carré de la distance OM est égale à $OM^2 = x^2 + (\ln x)^2 = f(x)$.
On vient de démontrer que cette fonction atteignait son minimum pour $x = \alpha$.
Or la distance OM a exactement les mêmes variations que son carré et elle atteint son minimum pour α.

Exercice 4. Suites.

1. La suite (u_n) est la somme de $n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{2}$:

$$u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Puisque $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on a d'abord $\lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

Ensuite, par différence puis par produit $\boxed{\lim u_n = 2}$

2. La distance de u_n à 2 est la valeur absolue de la différence entre ces deux nombres.
On remarque :

$$u_n = 2 - \frac{1}{2^n} < 2$$

Par conséquent, la distance de u_n à 2 est $2 - u_n = \dfrac{1}{2^n}$.
Il s'agit maintenant de résoudre :

$$\frac{1}{2^n} < 10^{-6} \iff 2^n > 10^6$$

Par application des propriétés du logarithme, cette inéquation est équivalente à $n \ln 2 > \ln 10^6$
On obtient en divisant les deux membres par $\ln 2 > 0$:

$$n > \frac{\ln 10^6}{\ln 2} \approx 19,93$$

Le plus petit entier qui vérifie cette condition est $\boxed{n = 20}$.