Exercice 1. `[4 pts]` **Restitution de connaissances**

On admet dans cet exercice qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que
- pour tout réel x : $f'(x) = f(x)$
- et de plus $f(0) = 1$

1. Démontrer que la fonction $g(x) = f(x) \cdot f(-x)$ est constante et toujours égale à 1
2. Soit b un réel fixé. Démontrer que la fonction $h(x) = f(x+b) \cdot f(-x)$ est constante et toujours égale à $f(b)$
3. Déduire des questions précédentes que pour tout a et b :
$$f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$$
4. Démontrer que le résultat précédent implique que pour tout entier naturel n , on a :
$$f(na) = f(a)^n$$

Exercice 2. `[4pts]` **Résolution d'équations.**

1. Résoudre l'équation $X^2 - 3X - 4 = 0$ d'inconnue réelle X
2. On considère l'équation :
$$e^x = 4e^{-x} + 3$$
Résoudre cette équation en utilisant les résultats de la question précédente

Exercice 3. `[8 pts]` **Étude d'une fonction .**

On se propose d'étudier la fonction définie pour tout x par
$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$
1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
2. Représenter la courbe (C) de la fonction f ainsi que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = x + 2$ et $y = x - 2$
3. Position relative de (C) et des droites (D_1) et (D_2).
a) À partir de leur représentation graphique, proposer une conjecture concernant la position relative de (C) et des droites (D_1) et (D_2).
b) Démontrer la conjecture de la question précédente.
4. Démontrer que f est dérivable et que :
$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$$
5. Construire le tableau de variations de f.
6. Montrer qu'il y a un point et un seul de la courbe (C) tel que la tangente à (C) en ce point soit horizontale. Déterminer ensuite une équation de cette tangente.

Exercice 4. `[4 pts]` **Suites.**

On pose pour tout entier n :
$$u_n = e^{-n+2}$$
1. La suite ainsi définie est-elle arithmétique ou géométrique ?
2. Montrer que la somme $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ peut s'écrire :
$$S_n = \frac{e^3 - e^{2-n}}{e - 1}$$
3. Déterminer les limites respectives de (u_n) et de (S_n) .

Exercice 1. Restitution de connaissances

1. Calcul de la dérivée de g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \times f(-x) + f(x) \times -f'(-x) \\ &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc g est constante et toujours égale à $g(0) = f(0)^2 = 1$

2. Calcul de la dérivée de h :

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x+b) \times f(-x) + f(x+b) \times -f'(-x) \\ &= f(x+b)f(-x) - f(x+b)f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc h est constante et toujours égale à $h(0) = f(b)$

3. Par application de la question précédente, on écrit pour $x = a$:

$$f(a+b) \cdot f(-a) = f(b)$$

En multipliant chaque membre par $f(a)$, on obtient :

$$f(a+b) \cdot f(a) \cdot f(-a) = f(a) \cdot f(b)$$

En appliquant maintenant le résultat de la première question, il vient :

$$f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$$

4. On procède par récurrence sur n.

- pour $n = 0$, l'égalité est vérifiée car

$$f(na) = f(0) = 1 \text{ et } f(a)^n = 1 \text{ par convention}$$

- pour $n = 1$, l'égalité est vérifiée, chaque membre étant égal à $f(a)$
- supposons que le résultat ait été vérifié pour un certain entier n ; on en déduit :

$$\begin{aligned} f\left[(n+1)a\right] &= f(na + a) \\ &= f(na) \cdot f(a) \\ &= f(a)^n \cdot f(a) \\ &= f(a)^{n+1} \end{aligned}$$

Le résultat précédent est donc vrai pour tout entier naturel n.

Exercice 2. Résolution d'équations.

1. Le discriminant est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times -4 = 25$.

L'équation a donc deux solutions réelles :

$$X_1 = \frac{3-5}{2} = -1 \quad \text{ et } \quad X_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$

2. On pose $X = e^x$, ce qui implique $e^{-x} = \dfrac{1}{X}$. L'équation auxiliaire obtenue est alors :

$$X = \frac{4}{X} + 3$$

On obtient une équation équivalente en multipliant les deux membres par $X > 0$:

$$X^2 = 4 + 3X \iff X^2 - 3X - 4 = 0$$

Cette équation ayant été résolue dans la question précédente, il reste maintenant à résoudre :

$$e^x = -1 \quad : \quad \text{pas de solution car } \exp > 0$$

$$e^x = 4 \iff x = \ln 4$$

L'équation initiale a donc une solution qui est $\ln 4$.

Exercice 3. Étude d'une fonction .

1. D'après le cours, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

On en déduit en utilisant les théorèmes usuels : $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4e^x}{e^x+3} = 0$.

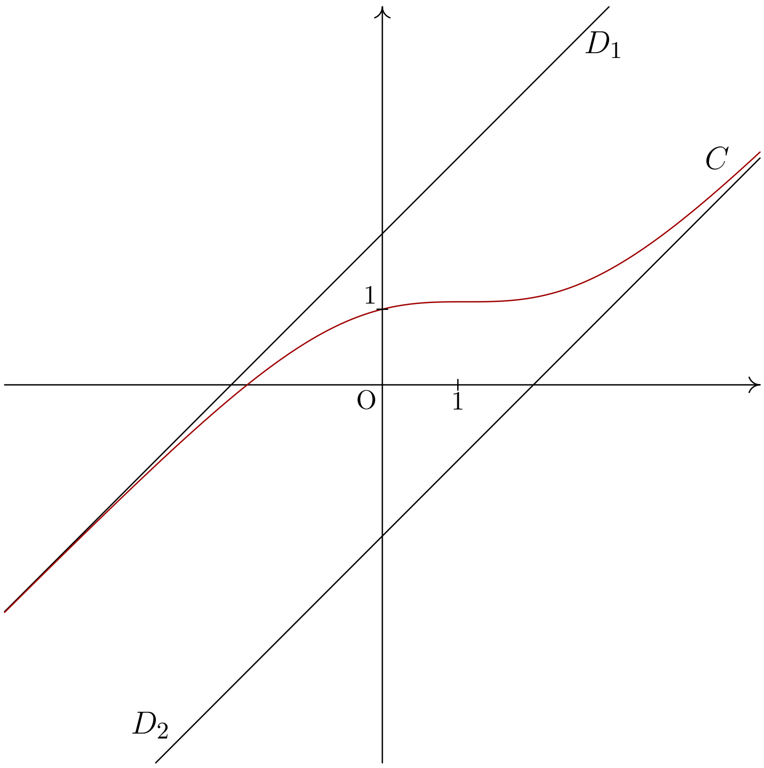
On obtient : $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

La limite en $+\infty$ étant indéterminée, on met en facteur e^x au dénominateur du dernier terme :

$$\frac{4e^x}{e^x+3} = \frac{4e^x}{e^x\left(1+\dfrac{3}{e^x}\right)} = \frac{4}{1+\dfrac{3}{e^x}}$$

Sachant $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on obtient, en utilisant les théorèmes usuels : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{4e^x}{e^x+3} = 4$ et finalement $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2. Figure



3. a) La courbe (C) paraît être en-dessous de la droite (D_1) et au-dessus de la droite (D_2).

b) On calcule la différence entre les deux fonctions représentées par (C) et par (D_1) :

$$f(x) - (x+2) = -\frac{4e^x}{e^x+3}$$

Puisque l'exponentielle est strictement positive, cette différence est strictement négative : (C) est en-dessous de (D_1).

On calcule la différence entre les deux fonctions représentées par (C) et par (D_2) :

$$f(x) - (x-2) = 4 - \frac{4e^x}{e^x+3} = \frac{12}{e^x+3}$$

Puisque l'exponentielle est strictement positive, cette différence est strictement positive : (C) est au-dessus de (D_2).

4. D'après le cours, l'exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$: la fonction f est donc dérivable en tant que quotient puis somme de fonctions dérivables :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - 4\,\frac{e^x\,(e^x+3) - e^x\,e^x}{(e^x+3)^2} \\
&= 1 - \frac{12\,e^x}{(e^x+3)^2} \\
&= \frac{e^{2x} + 6\,e^x + 9 - 12\,e^x}{(e^x+3)^2} \\
&= \frac{e^{2x} - 6\,e^x + 9}{(e^x+3)^2} \\
&= \frac{(e^x-3)^2}{(e^x+3)^2} \\
&= \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2
\end{aligned}$$

5. La dérivée est positive ou nulle puisque c'est un carré.
Elle s'annule lorsque :

$$e^x - 3 = 0 \iff x = \ln 3$$

Pour tout $x \neq \ln 3$, on a donc $f'(x) > 0$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

6. La tangente à (C) au point d'abscisse a est horizontale lorsque $f'(a) = 0 \iff a = \ln 3$.
On vérifie alors $f(a) = \ln 3 + 2 - \dfrac{12}{6} = \ln 3$.
La tangente à (C) au point d'abscisse a a pour équation $\boxed{y = \ln 3}$.

Exercice 4. Suites.

1. On calcule le rapport :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-(n+1)+2}}{e^{-n+2}} = e^{-n+1+n-2} = e^{-1}$$

La suite est **géométrique** de premier terme $u_0 = e^2$ et de raison $q = e^{-1}$

2. La somme comprend $n+1$ termes. Par application du cours :

$$S_n = u_0\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = e^2 \times \frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}} = \frac{e^2 - e^{1-n}}{1-e^{-1}}$$

On multiplie enfin le numérateur et le dénominateur par e :

$$S_n = \frac{e^3 - e^{2-n}}{e-1}$$

3. Sachant $\lim -n+2 = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, on a $\boxed{\lim u_n = 0}$

On en déduit avec les théorèmes sur les opérations $\boxed{\lim S_n = \dfrac{e^3}{e-1}}$