Exercice 1. [6 pts] **Étude d'une fonction polynôme**

On considère dans cet exercice la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2$$

1. Calculer la dérivée $g'(x)$
2. Factoriser le résultat et étudier le signe de $g'(x)$
3. En déduire les variations de la fonction g
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement une solution α et que celle-ci est comprise entre 1 et 2
5. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.
6. En déduire le signe de $g(x)$

Exercice 2. [8 pts] **Étude d'une fonction rationnelle.**

On se propose d'étudier la fonction définie pour tout $x \neq 1$ par
$$f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x - 1}$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition de f
2. En déduire l'équation d'une droite asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f
3. Étude des variations.
   a) Montrer que f est dérivable pour tout $x \neq 1$ et calculer $f'(x)$
   b) Montrer que $f'(x)$ est toujours du signe de $g(x)$ où g est la fonction qui a été étudiée dans le premier exercice
4. Résumer l'étude précédente dans un tableau de variations.
5. On note (T) la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0
   a) Déterminer une équation de la droite (T)
   b) Justifier l'affirmation suivante :
   « *la position relative de $\mathcal{C}$ et de T dépend du signe de* $\dfrac{x^3 + 2x^2}{x - 1}$ »
   c) Étudier la position relative des deux courbes
6. Tracer $\mathcal{C}$, son asymptote et la tangente T .

Exercice 3. [3 pts] **Continuité et dérivabilité d'une fonction.**

1. On définit la fonction f en posant $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^3 + 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
   Peut-on affirmer que f est continue sur $\mathbb{R}$?
2. On considère la fonction $f(x) = x\sqrt{x}$
   a) Montrer qu'elle est dérivable pour $x > 0$
   b) Calculer le taux d'accroissement de f en 0. Peut-on affirmer que f est dérivable en 0 ?

Exercice 4. [3 pts] **Calculs de dérivées.**

Calculer la dérivée des fonctions suivantes

1. $\sqrt{x^2 + 2x + 5}$
2. $\cos(2x) - \sin^2(x)$
3. $\dfrac{2}{(3x - 1)^3}$

Exercice 1. Étude d'une fonction polynôme

1. Calcul de la dérivée : $g'(x) = 6x^2 - 6x$
2. Pour tout x réel : $g'(x) = 6x(x-1)$.
   Les racines de ce trinôme sont 0 et 1. D'après le théorème sur le signe du trinôme :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	

4. La fonction g est strictement négative sur $]-\infty\,;-3[$: l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle
   La fonction g est continue et strictement croissante sur $[1\,;2]$; l'intervalle image est $[-3\,;2]$ et il contient 0 : l'équation $g(x) = 0$ a une solution et une seule α entre 1 et 2 .
   Il ne peut y avoir d'autre solution pour $x > 2$ car dans ce cas : $g(x) > g(2) = 2$
5. On procède par balayage.
   $f(1,8) \approx -0,06 < 0$ et $f(1,9) \approx 0,89 > 0 \Rightarrow 1,8 < \alpha < 1,9$
   $f(1,8) \approx -0,06 < 0$ et $f(1,81) \approx 0,03 > 0 \Rightarrow 1,8 < \alpha < 1,81$
6. On a vu que $g(x) < 0$ si $x < 1$
   D'après les variations :

$$\begin{cases} 1 \leq x < \alpha & \Rightarrow g(x) < 0 \\ x = \alpha & \Rightarrow g(x) = 0 \\ \alpha < x & \Rightarrow 0 < g(x) \end{cases}$$

Exercice 2. Étude d'une fonction rationnelle.

1. La limite d'un quotient de deux polynômes en l'infini est la limite du quotient des deux termes de plus haut degré.
   Dans notre cas, ce quotient est $\dfrac{x^3}{x} = x^2$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
   Par ailleurs, on trouve $\lim\limits_{x\to 1} x^3 + 2x = 3$.
   Donc $\lim\limits_{x\to 1^-} x - 1 = 0^-$ implique $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$
   De même $\lim\limits_{x\to 1^+} x - 1 = 0^-$ implique $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$
2. La droite d'équation $x = 1$ est par définition asymptote *verticale* à la courbe $\mathcal{C}$ de f
3. Étude des variations.
   a) La fonction f est dérivable sur son domaine de définition en tant que quotient de deux fonctions dérivables et pour tout $x \neq 1$:
   $$f'(x) = \frac{(3x^2+2)(x-1) - (x^3+2x)}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$
   b) Puisque $(x-1)^2 > 0$, on peut affirmer que $f'(x)$ est toujours du signe de $g(x)$.

4. Le signe de $g(x)$ ayant été précédemment étudié, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. a) La droite (T) a pour équation :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \iff \boxed{y = -2x}$$

b) Pour déterminer la position des deux courbes, on étudie le signe de la différence entre les deux fonctions qu'elles représentent :

$$f(x) - (-2x) = \frac{x^3+2x}{x-1} + 2x = \frac{x^3+2x^2}{x-1}$$

c) Cette différence se factorise :

$$\frac{x^3+2x^2}{x-1} = \frac{x^2(x+2)}{x-1}$$

Construisons le tableau donnant le signe de ce quotient :

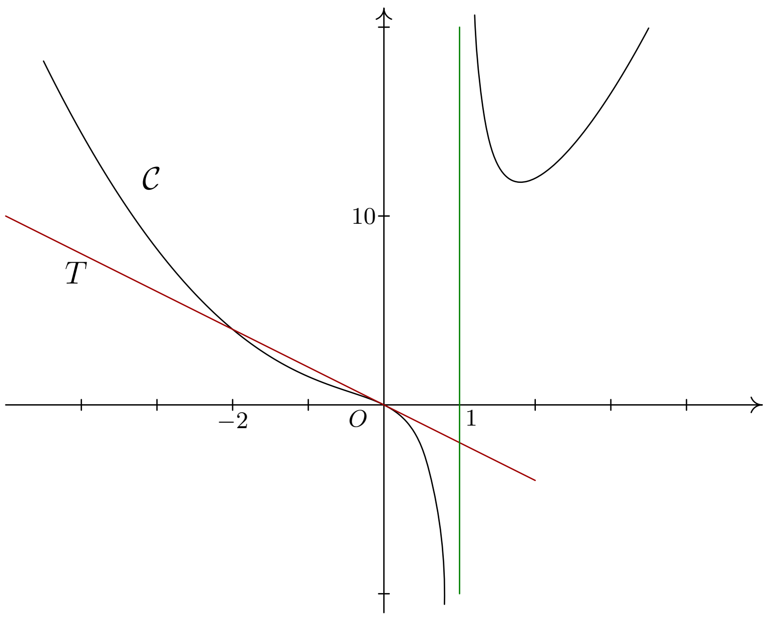
x	$-\infty$		-2		0		1		$-\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2(x+2)}{x-1}$		$+$	0	$-$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

La courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de T pour $x < -2$ et $x > 1$

La courbe $\mathcal{C}$ est en-dessous de T pour $-2 < x < 0$ et $0 < x < 1$

Pour $x = -2$ et pour $x = 0$, $\mathcal{C}$ et T ont un point commun.

6. Figure



Exercice 3. Continuité et dérivabilité d'une fonction.

1. Sachant qu'un polynôme est continu sur $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier la continuité de f en 1.
D'une part $\lim\limits_{x\to1^-} x^2+1=2$ et d'autre part $\lim\limits_{x\to1^+} x^3+2x-1=2$
Puisque ces deux limites sont égales, la fonction est continue en 1.
Elle est donc **continue** sur $\mathbb{R}$

2. a) Sur $]0\,;+\infty[$, la fonction est dérivable en tant que produit de fonctions dérivables :

$$f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}=\boxed{\frac{3\sqrt{x}}{2}}$$

b) Le taux d'accroissement de f en 0 est

$$T(h)=\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\sqrt{h}$$

Puisque $\lim\limits_{h\to0} T(h)=0$, on peut affirmer que f est **dérivable** en 0 et que $\boxed{f'(0)=0}$

Exercice 4. Calculs de dérivées.

1. Posons $f(x)=\sqrt{u(x)}$ où $u(x)=x^2+2x+5$ et $u(x)=2x+2$
Par application directe du cours : $\boxed{f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}}$

2. Posons $f(x)=u(x)-v(x)$ où $u(x)=\cos(2x)$ et $v(x)=\sin^2(x)$

- on calcule $u'(x)$ en utilisant la dérivée d'une composée avec une fonction affine :
$$u'(x)=2\times-\sin(2x)=-2\sin(2x)$$
- on calcule $v'(x)$ en utilisant la dérivée d'une puissance :
$$v'(x)=2\,\sin x\,\cos x$$

Le résultat final est $\boxed{f'(x)=-2\sin(2x)-2\sin(x)\cos(x)}$

3. Soit $f(x)=\dfrac{2}{u(x)}$ où $u(x)=(3x-1)^3$.
La formule de dérivation d'un inverse donne $f'(x)=\dfrac{-2u'(x)}{u^2(x)}$
Pour calculer $u'(x)$, posons
$$u(x)=v^3(x) \text{ où } v(x)=3x-1 \text{ et } v'(x)=3$$
La formule de dérivation d'une puissance donne
$$u'(x)=3v^2(x)\,v'(x)=9(3x-1)^2$$
Le résultat est donc $f'(x)=\dfrac{-18(3x-1)^2}{(3x-1)^6}=\boxed{\dfrac{-18}{(3x-1)^4}}$