Exercice 1. `[7 pts]` **Étude d'une suite arithmético-géométrique**

On considère dans cet exercice la suite définie par

$$u_0 = -3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = \frac{3+u_n}{2}$$

1. Représenter graphiquement la fonction $f(x) = \dfrac{3+x}{2}$
ainsi que la droite (Δ) d'équation $y = x$
Représenter sur le dessin les 5 premiers termes de la suite (u_n).

2. Proposer une conjecture concernant la limite éventuelle de (u_n)

3. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3 .

4. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
Que peut-on en déduire pour la limite de (u_n) ?

5. On veut déterminer dans cette question la valeur de la limite ℓ de la suite. Pour cela on pose $v_n = u_n - 3$

a) Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser la raison et le premier terme de cette suite

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction du rang n

c) En déduire la limite de (u_n)

Exercice 2. `[5 pts]` **Restitution de connaissances.**

1. Démontrer le résultat suivant du cours :
« *une suite croissante et non majorée tend vers* $+\infty$ »

2. Voici une liste d'affirmations. Indiquer si chacune d'entre elle est VRAIE ou FAUSSE

a) « *une suite divergente tend vers* $+\infty$ *ou vers* $-\infty$ »

b) « *si la suite* (u_n) *est croissante et strictement positive,*
alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ *est convergente* »

c) « *si* (u_n) *converge vers le réel* ℓ, *alors elle est nécessairement monotone* »

Justifier votre réponse par une courte démonstration si votre réponse est « VRAI » ou par un contrexemple si votre réponse est « FAUX »

Exercice 3. `[5 pts]` **Calculs de sommes.**

1. On veut calculer dans cette question la somme S des multiples de 3 qui sont compris entre 100 et 1000

$$S = 102 + 105 + \ldots + 999$$

Pour cela on numérote les termes de la somme en posant $u_0 = 102$, $u_1 = 105$, $u_2 = 108$ etc ...

a) Quelle est la nature de la suite ainsi définie ?

b) Soit p le rang du dernier terme : il vérifie donc $u_p = 999$. Calculer le nombre p .

c) En déduire le nombre de termes de la somme S puis la valeur de cette somme.

2. On veut déterminer le réel x dont l'écriture décimale est

$$x = 0,234\,234\,234\ldots$$

où le motif formé par les chiffres 234 se répète à l'infini

a) On note

$$S_n = 0,234\,234\,234\ldots 234$$

où le motif formé par les chiffres 234 se répète exactement n fois
Montrer que S_n est la somme de n termes d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison q

b) Exprimer S_n en fonction du rang n et de la raison q

c) En déduire le réel x

Exercice 4. `[3 pts]` **Calculs de limites.**

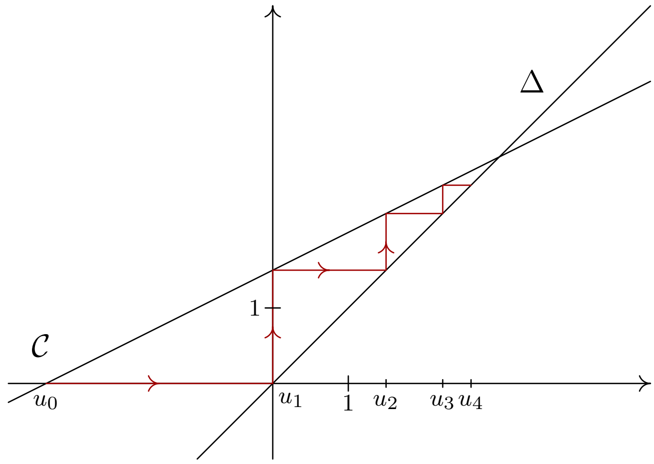
Calculer la limite des suites définies en fonction du rang n par

1. $\dfrac{n^2 - n + 3}{(n+1)(n^2+1)}$

2. $\dfrac{2 + (-1)^n}{1 + n}$

Exercice 1. Étude d'une suite arithmético-géométrique

1. Figure



2. La suite (u_n) semble converger vers 3 .

3. Majoration de (u_n)

- pour $n = 0$, on a bien $u_0 = -3 \leq 3$
- supposons que pour un certain n on ait $u_n \leq 3$
  on rajoute 3 aux deux membres de l'inégalité : $3 + u_n \leq 6$
  on divise par 2 chacun des deux membres de l'inégalité : $\dfrac{3+u_n}{2} \leq 3 \iff u_{n+1} \leq 3$
- on peut conclure que pour tout $n \geq 0$: $u_n \leq 3$

4. Variations de (u_n)

- pour $n = 0$, on a $u_0 = -3$ et $u_1 = 0$ et donc $u_0 \leq u_1$
- supposons que pour un certain n on ait $u_n \leq u_{n+1}$
  on rajoute 3 aux deux membres de l'inégalité : $3 + u_n \leq 3 + u_{n+1}$
  on divise par 2 chacun des deux membres de l'inégalité :
  $$\frac{3+u_n}{2} \leq \frac{3+u_{n+1}}{2} \iff u_{n+1} \leq u_{n+2}$$
- on peut conclure que pour tout $n \geq 0$: $u_n \leq u_{n+1}$

La suite (u_n) est croissante et majorée donc convergente vers un réel ℓ .

5. a) Pour tout n :
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{3+u_n}{2} - 3 = \frac{u_n - 3}{2} = \boxed{\frac{v_n}{2}}$$
Donc (v_n) est **géométrique** de raison $q = \dfrac{1}{2}$
Son premier terme est $v_0 = u_0 - 3 = -3$

b) $v_n = v_0\, q^n = \dfrac{-3}{2^n}$ implique $u_n = 3 + v_n = \boxed{3 - \dfrac{3}{2^n}}$

c) $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ implique $\lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$
Enfin, par produit et par somme $\boxed{\lim u_n = 3}$

Exercice 2. Restitution de connaissances.

1. <u>Rappel des trois définitions du cours</u>
suite croissante : pour tout entier n, $u_n \leq u_{n+1}$
suite majorée : il existe un réel K tel que pour tout n, $u_n \leq K$
suite qui tend vers $+\infty$:
pour tout réel K, il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow u_n > K$

Démonstration
Supposons maintenant que la suite (u_n) n'est pas majorée : pour tout réel K, il existe donc un entier n_0 tel que $u_{n_0} > K$
Mais par hypothèse la suite est croissante. Donc $n \geq n_0$ entraîne $u_n \geq u_{n_0} \geq K$
Par conséquent la suite (u_n) tend vers $+\infty$

2. a) FAUX.
La suite $(-1)^n$ est une suite qui diverge sans avoir de limite

b) VRAI.
La suite $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ est strictement positive et décroissante.
Elle converge donc en tant que suite décroissante et minorée.

c) FAUX.
La suite $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge sans être ni croissante ni décroissante :

- la suite n'est pas décroissante car $u_1 = -1$, $u_2 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 < u_2$
- la suite n'est pas croissante car $u_2 = \dfrac{1}{2}$, $u_3 = -\dfrac{1}{3}$ et $u_2 > u_3$
- elle converge vers 0 car $-\dfrac{1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$ et $\lim -\dfrac{1}{n} = \lim \dfrac{1}{n} = 0$

Exercice 3. Calculs de sommes.

1. a) La suite est arithmétique de premier terme $u_0 = 102$ et de raison 3 .

b) $u_p = u_0 + p\,r \iff 999 = 102 + 3p \iff p = 199$.

c) Le nombre de termes de la somme S est donc $p + 1 = 300$
Cette somme est donc $S = \dfrac{(102 + 999) \times 300}{2} = 165\,150$.

2. a) Considérons la suite géométrique de premier terme $u_0 = 0,234$ et de raison $q = 0,001$
On obtient $u_1 = 0,000\,234$, $u_2 = 0,000\,000\,234$ etc ...
Donc S_n est la somme des n premiers termes de cette suite :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$$

b) $S_n = u_0 \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = \dfrac{234}{999}(1 - 0,001^n)$

c) $-1 < 0,001 < 1$ implique $\lim 0,001^n = 0$ puis $x = \lim S_n = \boxed{\dfrac{26}{111}}$

Exercice 4. Calculs de limites.

1. L limite d'un quotient de deux polynomes en l'infini est la limite du quotient des deux termes de plus haut degré :

$$\lim \frac{n^2 - n + 3}{(n+1)(n^2+1)} = \lim \frac{n^2}{n^3} = \lim \frac{1}{n} = \boxed{0}$$

2. Sachant $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, on ontient l'encadrement :

$$\frac{1}{1+n} \leq \frac{2 + (-1)^n}{1+n} \leq \frac{3}{1+n}$$

On vérifie $\lim \dfrac{1}{1+n} = \lim \dfrac{3}{1+n} = 0$

Le théorème des gendarmes entraîne $\boxed{\lim \dfrac{2 + (-1)^n}{1+n} = 0}$