p.266 n° 129

Avertissement : les points B et C doivent être échangés dans la figure du livre pour que l'énoncé corresponde.

1. Construction de la figure : on choisira par exemple $a = 3 - i$ comme affixe de A . Le point initial peut être déplacé lorsque la figure est complète.
   - lancer `Geogebra`
   - taper `O = 0*i` et `A = 3 - i` dans la barre de saisie
   - sélectionner *Polygone régulier* dans le cinquième menu de la barre d'outils
     cliquer sur `O` puis sur `A` et choisir le nombre de sommets `n = 4`
     attention : les sommets du carré doivent être OACB dans cet ordre
   - avec le même outil *Polygone régulier* cliquer sur `O` puis `A` et choisir `n = 3`
     renommer `K` le point obtenu
   - réitérer la construction avec `C`, `A` et `n = 3` pour construire le point `L`
   - si nécessaire, demander l'affichage des objets auxiliaires dans la fenêtre *Algèbre*
2. **a)** Il suffit de taper dans la barre de saisie : `u = (L - B)/(K - B)` .
   Le résultat est un réel (on lit `u = 3.73`)

   b) Lorsque u est réel, les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BL}$ sont colinéaires : les points B, K et L sont alors alignés.
3. Pour traduire les deux conditions $OA = OB$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, on considère le nombre complexe $Z = \dfrac{b}{a}$:
   - son module est $|Z| = \dfrac{|b|}{|a|} = \dfrac{OB}{OA} = 1$
   - un argument est $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

   Donc Z est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

   Sous forme algébrique, il s'écrit $Z = i$. On en déduit $\dfrac{b}{a} = i \iff \boxed{b = i\,a}$
4. Les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu :
   $$\frac{a+b}{2} = \frac{0+c}{2} \iff c = a + b \iff \boxed{c = (1+i)a}$$
5. Pour traduire les propriétés du triangle OAK, on considère le rapport $Z = \dfrac{k}{a}$:
   - son module est $|Z| = \dfrac{|k|}{|a|} = \dfrac{OK}{OA} = 1$
   - un argument est $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OK}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

   Donc Z est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$.

   Il s'écrit $e^{i\frac{\pi}{3}}$ sous forme trigonométrique et $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ sous forme algébrique. Par conséquent :
   $$\boxed{k = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,a}$$
6. Pour traduire les propriétés du triangle CAL, on considère le rapport $Z = \dfrac{l-c}{a-c}$:

- son module est $|Z| = \dfrac{|l-c|}{|a-c|} = \dfrac{CL}{CA} = 1$
- un argument de Z est $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CL}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

De nouveau Z est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$, ce qui implique :

$$\frac{l-c}{a-c} = e^{i\frac{\pi}{3}} \iff l = c + e^{i\frac{\pi}{3}}(a-c)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} l &= c + e^{i\frac{\pi}{3}}(a-c) \\ &= (1+i)\,a + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(-ia) \\ &= \left(1+i-i\,\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) a \\ &= \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) a \end{aligned}$$

7. On commence par calculer :

$$\begin{aligned} l-b &= \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) a - ia = \frac{2+\sqrt{3}-i}{2}\,a \\ k-b &= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}-i\right) a = \frac{1+i(\sqrt{3}-2)}{2}\,a \end{aligned}$$

On peut maintenant vérifier qu'en multipliant $k-b$ par le réel $2+\sqrt{3}$, on retrouve $l-b$:

$$\begin{aligned} (2+\sqrt{3})\,(k-b) &= \frac{2+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-2)(2+\sqrt{3})}{2}\,a \\ &= \frac{2+\sqrt{3}-i}{2}\,a \\ &= l-b \end{aligned}$$

Le rapport $\dfrac{l-b}{k-b}$ est donc le réel $2+\sqrt{3}$.

Dans ce cas, les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BL}$ sont colinéaires : les points B , K et L sont alignés.