p.265 n° 124

1. **a)** On lance `Geogebra` et dans la barre de saisie on tape :
```
a = 5 - i*sqrt(3)
b = 4 + 2*i*sqrt(3)
q = b/2
```
b) Pour construire le point d'affixe k, il y a plusieurs méthodes. Une façon de procéder est la suivante :
- sélectionner l'outil *Vecteur* dans le troisième menu de la barre d'outils
- cliquer sur les points d'affixe b puis a pour créer le vecteur $\overrightarrow{BA}$ d'affixe $a-b$
- sélectionner l'outil *Représentant* dans le troisième menu
- cliquer sur le vecteur $\overrightarrow{BA}$ puis sur le point d'affixe q :
  le logiciel construit le point d'affixe Q' tel que
  $$\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{BA}$$
- renommer K le point ainsi obtenu : $ABQK$ est un parallélogramme
  renommer ensuite les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{QK}$
- taper dans la barre de saisie : `u = (k - a)/k`

c) Taper dans la barre de saisie : `u = (k - a)/k`
La valeur de u se lit dans la fenêtre *Algèbre* : $u = -0,58i$

d) Le point d'affixe u est un point de l'axe des ordonnées
On verra ultérieurement que cette propriété implique également $\overrightarrow{OK} \perp \overrightarrow{AK}$

2. Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ a pour affixe $a-b = (5-i\sqrt{3}) - (4+2i\sqrt{3}) = 1-3i\sqrt{3}$
Le point Q a pour affixe $q = \dfrac{0+b}{2} = 2+i\sqrt{3}$
Le vecteur $\overrightarrow{QK}$ a pour affixe $k-q = k-2-i\sqrt{3}$
Puisque $ABQK$ est un parallélogramme, les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{QK}$ sont égaux et ont la même affixe :
$$k-2-i\sqrt{3} = 1-3i\sqrt{3} \iff \boxed{k = 3-2i\sqrt{3}}$$

3. On commence par calculer $k-a = (3-2i\sqrt{3}) - (5-i\sqrt{3}) = -2-i\sqrt{3}$
On en déduit
$$u = \frac{-2-i\sqrt{3}}{3-2i\sqrt{3}} \times \frac{3+2i\sqrt{3}}{3+2i\sqrt{3}} = \frac{-7i\sqrt{3}}{21} = \boxed{-i\frac{\sqrt{3}}{3}}$$
Le nombre u est bien un **imaginaire pur** .
L'affixe de $\overrightarrow{AK}$ étant $-2-i\sqrt{3}$, ce vecteur a pour coordonnées $(-2\,,-\sqrt{3})$
L'affixe de $\overrightarrow{OK}$ étant $3-2i\sqrt{3}$, ce vecteur a pour coordonnées $(3\,,-2\sqrt{3})$
Ces deux vecteurs sont orthogonaux car $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{OK} = -2\times 3 + -\sqrt{3}\times -2\sqrt{3} = 0$
Le triangle OKA est donc **rectangle** en K .
On peut remarquer que $q = a-k = 2+i\sqrt{3}$. On en déduit $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{AK}$: le quadrilatère $OQAK$ est un parallélogramme.Puisqu'il a un angle droit en K, c'est un **rectangle**.

4. **a)** On place le point en tapant `c = 2*a/3` dans la barre de saisie.
b) Il est raisonnable de conjecturer que les points K, C et B sont alignés.

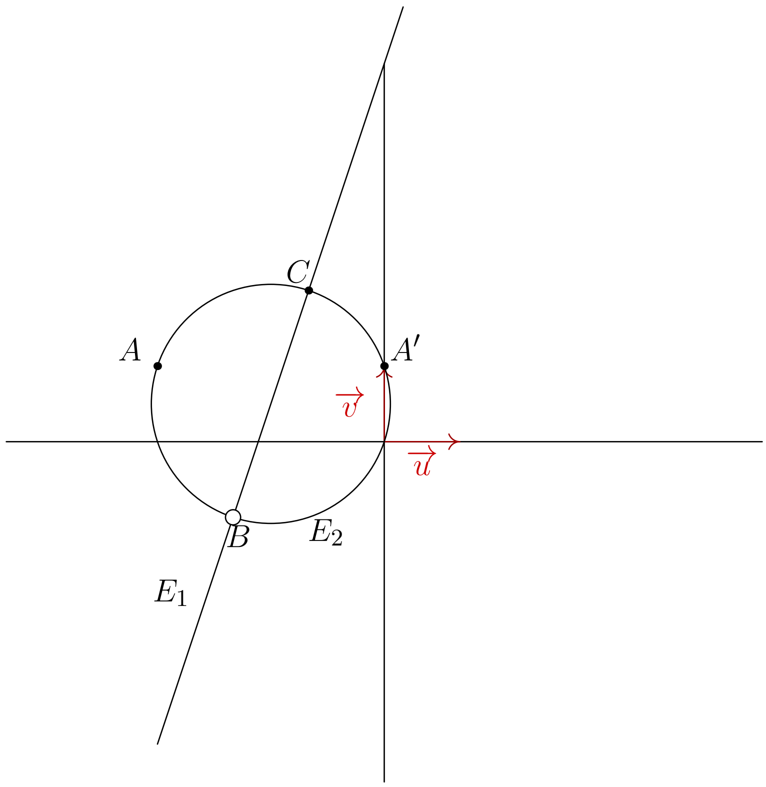
c) On commence par calculer $k-b=(3-2i\sqrt{3})-(4+2i\sqrt{3})=-1-4i\sqrt{3}$
L'affixe de $\overrightarrow{BK}$ est $-1-4i\sqrt{3}$ ou de façon équivalente ses coordonnées sont $(-1\,,-4\sqrt{3})$
On calcule ensuite $c=\dfrac{2a}{3}=\dfrac{10-2i\sqrt{3}}{3}$
On peut maintenant calculer $k-c=3-2i\sqrt{3}-\dfrac{10-2i\sqrt{3}}{3}=\dfrac{-1-4i\sqrt{3}}{3}$
L'affixe de $\overrightarrow{CK}$ est $\dfrac{-1-4i\sqrt{3}}{3}$ ou de façon équivalente ses coordonnées sont $\left(-\dfrac{1}{3}\,,-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$
On en déduit

$$\boxed{\frac{k-b}{k-c}=3}$$

Ce nombre est un **nombre réel**.
On peut dans ce cas écrire $\overrightarrow{BK}=3\overrightarrow{CK}$: les deux vecteurs sont **colinéaires** , ce qui prouve que les trois points K, C et B sont alignés.

p.268 n° 143

Figure



1. Calcul de l'image de z_A :

$$f(-3+i)=\frac{-3+i+1-2i}{-3+i+2+i}=\frac{-2-i}{-1+2i}\times\frac{-1-2i}{-1-2i}=i$$

2. Pour tout $z\neq -2-i$, l'équation est équivalente à :

$$\begin{aligned} z+1-2i=2i(z+2+i) &\iff (1-2i)z=-3+6i\\ &\iff z=\frac{-3+6i}{1-2i}\times\frac{1+2i}{1+2i}\\ &\iff z=\frac{-15}{5}=-3\end{aligned}$$

3. On calcule $f(x+iy)$ où x et y sont réels :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{x+iy+1-2i}{x+iy+2+i} \\ &= \frac{(x+1)+i(y-2)}{(x+2)+i(y+1)} \times \frac{(x+2)-i(y+1)}{(x+2)-i(y+1)} \\ &= \frac{[(x+1)(x+2)+(y-2)(y+1)]+i\,[(x+2)(y-2)-(x+1)(y+1)]}{(x+2)^2+(y+1)^2} \end{aligned}$$

On peut maintenant calculer la partie réelle puis la partie imaginaire de $f(z)$:

$$\begin{cases} R\acute{e}[f(z)] & = \dfrac{x^2+y^2+3x-y}{(x+2)^2+(y+1)^2} \\ Im[f(z)] & = \dfrac{y-3x-5}{(x+2)^2+(y+1)^2} \end{cases}$$

4. Les points tels que $f(z)$ est réel ont des coordonnées qui vérifient

$$(x\,,y) \neq (-2\,,-1) \quad \text{et} \quad y-3x-5=0$$

L'ensemble E_1 est une droite privée d'un point . Cette droite passe par le point $B(-2\,,-1)$ pour lequel $f(z)$ n'est pas défini. Elle passe également par le point $C(-1\,,2)$ pour lequel $f(z)$ s'annule.

Les points tels que $f(z)$ est imaginaire pur ont des coordonnées qui vérifient

$$(x\,,y) \neq (-2\,,-1) \quad \text{et} \quad x^2+y^2+3x-y=0 \iff \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{4}$$

L'ensemble E_2 est un cercle privé d'un point. Le centre de cercle est le point de coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2}\,,\dfrac{1}{2}\right)$ et son rayon est $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. Ce cercle passe par les points A, B et C.