p.153 n° 147

Partie A : existence et unicité de la solution

1. Calcul de la dérivée . Pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

Sur $]0\,;+\infty[$, cette dérivée est strictement positive en tant que somme de deux termes strictement positifs : la fonction f est donc strictement croissante sur cet intervalle.

2. La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$: l'intervalle image est alors $\left]\lim\limits_{x\to 0} f(x)\,,\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$.

Il nous faut calculer ces deux limites.

- on sait $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, ce qui implique $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
- de même $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ entraîne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

L'intervalle image est donc $\mathbb{R}$ et il contient 0 : par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α et une seule dans $]0\,;+\infty[$.

3. On calcule

- d'une part : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \ln 2 \approx -0,19 < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} < \alpha$
- d'autre part : $f(1) = 1 + \ln 1 = 1 > 0 \Rightarrow \alpha < 1$

Partie B : encadrement de la solution

1. a) Calcul de la dérivée. Pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{1}{5}\left(4 - \frac{1}{x}\right) = \frac{4x-1}{5x}$$

Sur $]0\,;+\infty[$, cette dérivée est du signe de $4x - 1$:

$$\begin{cases} 4x-1 < 0 & \iff x < 1/4 \\ 4x-1 = 0 & \iff x = 1/4 \\ 4x-1 > 0 & \iff x > 1/4 \end{cases}$$

On en déduit le tableau de variations de g :

x	0		$1/4$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	$\dfrac{1+\ln 4}{5}$	↗	

La fonction g admet un minimum pour $x = \dfrac{1}{4}$ et ce minimum est :

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5}\left[4 \times \frac{1}{4} - \ln\left(\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{5}(1 + \ln 4)$$

b) D'après la question précédente, la fonction g est strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$. On peut donc écrire pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$:

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Longrightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) \leq g(x) \leq g(1)$$

On calcule ensuite

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5}\left[4 \times \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{2+\ln 2}{5} \approx 0,54$$

$$g(1) = \frac{1}{5}\left[4 \times 1 - \ln 1\right] = \frac{4}{5} = 0,8$$

Puisque $g\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$ et $g(1) < 1$, on obtient : $g(x) \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

c) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} g(x) = x &\iff \frac{4x - \ln x}{5} = x \\ &\iff 4x - \ln x = 5x \\ &\iff \ln x = -x \quad \text{(E)} \end{aligned}$$

2. a) Nous procédons par récurrence sur n.

- pour $n = 0$: $u_0 = \frac{1}{2} = 0,5$ et $u_1 = \frac{2+\ln 2}{5} \approx 0,54$
  on vérifie effectivement $0,5 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$
- supposons que pour un certain entier n on ait vérifié $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$
  sachant g croissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$, il vient : $g(0,5) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(1)$
  sachant également $0,5 \leq g(0,5)$ et $g(1) \leq 1$, on obtient alors : $0,5 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$
  la propriété est donc héréditaire
- <u>conclusion</u> : on peut écrire pour tout n : $\boxed{0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1}$

b) On a démontré dans la question précédente que la suite (u_n) est **croissante** et **majorée** par 1: elle est donc **convergente** vers un réel ℓ.
Cette suite étant définie par la relation $u_{n+1} = g(u_n)$, nous pouvons faire les deux remarques suivantes :

- d'une part $\lim u_{n+1} = \lim u_n = \ell$
- d'autre part $\lim g(u_n) = g(\ell)$ car la fonction g est **continue**

L'**unicité de la limite** implique alors $\boxed{\ell = g(\ell)}$.
Autrement dit, le nombre ℓ est solution de l'équation (E) .
Or , nous avons démontré dans la partie **A** que cette équation avait une solution unique notée α. Nous pouvons par conséquent conclure : $\boxed{\lim u_n = \alpha}$

3. a) Pour obtenir les premiers termes de (u_n) avec la calculatrice, on effectue les deux manipulations suivantes :

- on tape la valeur du terme initial c'est-à-dire `0.5` et on valide avec `ENTER` ou `EXE`
- on tape la formule permettant de calculer u_{n+1} en remplaçant u_n par la touche `Ans` , c'est-à-dire ici :

```
(4*Ans - Ln Ans) / 5
```

  et on valide avec `ENTER` ou `EXE`, ce qui donne le terme suivant

Il suffit alors de taper sur la touche de validation (`ENTER` ou `EXE`) autant de fois que nécessaire pour obtenir les termes successifs. Le tableau suivant donne ces termes arrondis à la sixième décimale :

n	u_n
0	0,5
1	0,538629
2	0,554649
3	0,561603
4	0,564674
5	0,566041
6	0,566650
7	0,566923
8	0,567045
9	0,567099
10	0,567124

b) Nous obtenons à partir du dernier arrondi :

$$0,56712 \leq u_{10} \leq 0,56713$$

Le texte nous donne le renseignement suivant :

$$u_{10} \leq \alpha \leq u_{10} + 0,0005$$

Nous en déduisons l'encadrement $\boxed{0,567 \leq \alpha \leq 568}$