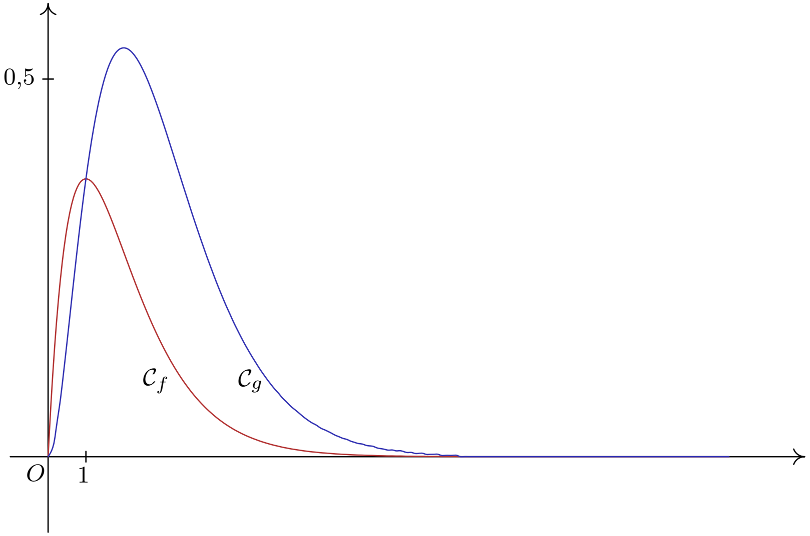
## p.154 n° 150

**1.** Figure




La fonction $f$ paraît être croissante sur $[0\,;1]$ puis décroissante sur $[1\,;+\infty[$ .
Sa limite en $+\infty$ paraît être 0.

**2.** Les résultats sur la croissance comparée nous donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ : on a donc effectivement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ .
On calcule la dérivée :

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times -e^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

L'exponentielle étant strictement positive, cette dérivée est du signe du facteur $(1-x)$ :

$$\begin{cases} 1-x<0 & \iff x>1 \\ 1-x=0 & \iff x=1 \\ 1-x>0 & \iff x<1 \end{cases}$$

On en déduit le tableau de variations :

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $\dfrac{1}{e}$ | ↘ | 0 |

La fonction $f$ admet donc un maximum pour $x=1$ et il vaut

$$f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

**3.** On peut conjecturer les résultats suivants :
- la courbe $\mathcal{C}_f$ paraît être au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $]0\,;1[$
- la courbe $\mathcal{C}_f$ paraît être en-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]1\,;+\infty$
- les deux courbes semblent avoir un point commun d'abscisse 0 et un point commun d'abscisse 1.

Pour démontrer ces affirmations, on calcule la différence entre les deux fonctions représentées par $f$ et $g$ :

$$d(x) = f(x) - g(x) = (x - x^2)e^{-x} = x(1-x)e^{-x}$$

On étudie ensuite le signe de cette différence.
L'exponentielle étant strictement positive, cette différence est du signe du produit $x(1-x)$.
Le tableau suivant donne le signe de ce produit :

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $1-x$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $x(1-x)$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

On a donc démontré que :
- sur $]0\,;1[$ $d(x)>0$ : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$
- sur $]1\,;+\infty[$ $d(x)<0$ : $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$
- en $x=0$ et en $x=1$, $d(x)=0$ : $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun

**p.154 n° 151**

**Partie A**

**1. a)** Calcul de la dérivée. Pour tout $t \geq 0$ :
$$f'(t) = 200 \times -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} = -100\, e^{-\frac{1}{2}t}$$
Puisque l'exponentielle est strictement positive, on a $f'(t) < 0$ : la fonction $f$ est strictement décroissante.

**b)** Sachant $\lim\limits_{t \to +\infty} -\frac{1}{2}t = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{1}{2}t} = 0$

On en déduit (par somme) $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 20$

La droite d'équation $y = 20$ est asymptote *horizontale* à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

**c)** Voir la figure ci-dessous

**2. a)** Pour déterminer l'instant où la température est redescendue à $50°C$, on trace la droite d'équation $y = 50$ : cette droite coupe la courbe $\mathcal{C}$ en un point dont l'abscisse est environ $3,79$ .

On peut donc estimer que cette température est atteinte au bout de 3 heures 47 minutes environ .

**b)** Il s'agit de résoudre l'équation :
$$f(t) = 50 \iff 200\, e^{-\frac{1}{2}t} + 20 = 50 \iff e^{-\frac{1}{2}t} = 0,15$$
En utilisant les propriétés du logarithme népérien, cette équation est équivalente à :
$$-\frac{1}{2}t = \ln 0,15 \iff t = -2 \ln 0,15$$
La calculatrice donne comme valeur approchée du résultat $t \approx 3,79$
.

**Partie B**

**1. a)** On a en général :
$$\begin{aligned} d_n &= \left(200\, e^{-\frac{1}{2}n} + 20\right) - \left(200\, e^{-\frac{1}{2}(n+1)} + 20\right) \\ &= 200 \left(e^{-\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n+1}{2}}\right) \end{aligned}$$
Les premières valeurs de cette suite sont données par le tableau :

| $n$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $d_n$ | 78,7 | 47,7 | 28,9 |

**b)** Pour calculer la limite, la forme précédente est indéterminée. On la modifie en factorisant :
$$d_n = 200\, e^{-\frac{n}{2}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)$$
Sachant $\lim -\frac{1}{2}n = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, on a $\lim e^{-\frac{n}{2}} = 0$

On en déduit (par produit) $\lim d_n = 0$

**2.** Il s'agit maintenant de résoudre :
$$\begin{aligned} d_n < 5 &\iff 200\, e^{-\frac{n}{2}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) < 5 \\ &\iff e^{-\frac{n}{2}} < \frac{0,025}{1 - e^{-\frac{1}{2}}} \\ &\iff -\frac{n}{2} < \ln\left(\frac{0,025}{1 - e^{-\frac{1}{2}}}\right) \end{aligned}$$
On obtient en multipliant les deux memres par $-2 < 0$ :
$$n > -2 \ln\left(\frac{0,025}{1 - e^{-\frac{1}{2}}}\right) \approx 5,51$$
Le plus petit entier cherché est donc $n = 6$.

La sixième heure est la première au cours de laquelle l'abaissement de température est inférieur à 5°C .

Figure