p.100 n° 125 . Méthode de la sécante

Le fichier joint **dm4.ggb** qui a été réalisé avec le logiciel GEOGEBRA 4.2 est le résultat des manipulations qui sont décrites dans la suite de ce document.
Il s'agit de résoudre l'équation $\cos(x+1)+x^2=0$

Partie 1 . Construction du graphique

1. Taper dans la barre de saisie : `f(x) = 2cos(x + 1) - x^2` et faire un zoom de `400%`
2. La courbe coupe l'axe des abscisse en un point d'abscisse $x \in [0\,,1]$
3. Taper dans la barre de saisie :

`A = (0,0)` puis `B = (1,0)`

Placer sur la courbe les points de mêmes abscisses que A et B en tapant dans la barre de saisie :

`A' = (x(A) , f(x(A))` puis `B' = (x(B) , f(x(B))`

4. Construction de la droite `(A'B')`

- sélectionner le bouton *Droite passant par deux points* (3ième menu de la barre d'outils)
- cliquer sur `A'` puis sur `B'` : la droite est construite

Construction de `C`

- sélectionner le bouton *Intersection entre deux objets* (2ième menu)
- cliquer sur la droite `A'B'` puis sur l'axe `Ox` : le point `C` est construit.

5. Taper dans la barre de saisie : `C' = (x(C) , f(x(C))`
6. Construction de `B'C'` : voir **étape 4**
Cette droite coupe l'axe `Ox` en `D` et la construction de `D'` se fait comme à l'**étape 5**
7. On réitère les **étapes 4** et **5** pour construire successivement
`(C'D')` puis `E`, puis `E'`
`(D'E')` puis `F` etc ...
En pratique, on obtient comme valeur approchée $x_D \approx 0,73$

Partie 2 . Calculs avec le tableur

1. Soient a et b les abscisses respectives de `A'` et de `B'` : leurs ordonnées sont $f(a)$ et $f(b)$.
La droite `(A' B')` a une équation réduite de la forme $y = mx + p$.
Calcul du coefficient directeur :

$$m = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On sait que cette droite passe par exemple par `B`, ce qui entraîne :

$$y_B = mx_B + p \iff f(b) = mb + p$$

On peut donc calculer l'ordonnée à l'origine :

$$p = f(b) - mb = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,b$$

On en déduit l'équation réduite de `(A' B')` :

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,x + f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,b$$

$$\iff \boxed{y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - b) + f(b)}$$

2. Le point `C` est le point de la droite `(A' B')` qui a pour ordonnée 0 . Son abscisse est donc solution de

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - b) + f(b)$$

Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned}
& \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - b) + f(b) = 0 \\
\iff\ & \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - b) = -f(b) \\
\iff\ & (x - b) = -f(b)\,\frac{b - a}{f(b) - f(a)} \\
\iff\ & x = b - f(b)\,\frac{b - a}{f(b) - f(a)}
\end{aligned}$$

3. On peut maintenant exécuter les calculs numériques par l'intermédiaire du logiciel.
La formule précédente permet de calculer l'abscisse de `C` quand on connaît les abscisses de `A` et de `B` . Cette formule écrite en ligne devient :

```
c = b - (b - a) / (f(b) - f(a)) * f(b)
```

4. Dans le menu `Affichage` sélectionner le *Tableur*.
Les abscisses respectives de `A` , `B` et `C` seront placées dans les cellules `A1`, `B1` et `C1` .
- en `A1`, taper la formule `= x(A)`
- en `B1`, taper la formule `= x(B)`
- en `C1`, taper la formule

```
= B1 - (B1 - A1) / (f(B1) - f(A1)) * f(B1)
```

Pour trouver l'abscisse du point `D`, on va remplacer `A` par `B` et `B` par `C`
- en `A2`, taper la formule `= B1`
- en `B2`, taper la formule `= C1`

On copie la formule de `C1` et on la colle en `C2` . Cette cellule doit maintenant contenir la formule

```
= B2 - (B2 - A2) / (f(B2) - f(A2)) * f(B2)
```

5. Il suffit maintenant de sélectionner la plage des cellules `A2`, `B2`, `C2` et de la coller en `A3`, `B3`, `C3` pour obtenir l'abscisse du point `E`
On peut continuer et obtenir l'abscisse de `F`, `G` etc…

6. On peut estimer que la solution cherchée vaut environ 0,77 : voir le fichier joint.

Partie 3 . Estimation de la deuxième solution

1. Sélectionner le bouton *Déplacer le graphique* dans le dernier menu
Déplacer la figure de façon que l'intervalle $[1\,,2]$ soit visible.
On a bien un point d'intersection dont l'abscisse est entre $1,5$ et 2

2. Il suffit de modifier l'abscisse de `A` et de `B` : on peut le faire directement dans la fenêtre *Algèbre*.
Ces valeurs puis toutes celles qui en dépendent sont mises à jour dans le tableur.
On obtient $1,61$ pour valeur approchée de cette solution