p.99 n° 123

Partie 1 . Asymptotes

1. La limite d'un quotient de polynômes à l'infini est la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Dans ce cas, le quotient est $\dfrac{2x}{x^3} = \dfrac{2}{x^2}$. Par conséquent, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$

Lorsque x tend vers 1, nous avons $\lim\limits_{x\to 1} 2x+1 = 3$ et $\lim\limits_{x\to 1} x^3-1 = 0$: cette forme est indéterminée.

On lève l'indétermination en étudiant le signe du dénominateur.

$\boxed{\text{Méthode 1}}$

On étudie rapidement les variations de $g(x) = x^3$. Puisque $g'(x) = 3x^2$, on peut affirmer que cette dérivée est strictement positive sauf en 0, où elle s'annule. Par conséquent, la fonction g est strictement croissante, ce qui implique :

$$\begin{cases} x < 1 & \Rightarrow x^3 < 1^3 = 1 \quad \text{et donc } x^3 - 1 < 0 \\ x = 1 & \Rightarrow x^3 = 1^3 = 1 \quad \text{et donc } x^3 - 1 = 0 \\ x > 1 & \Rightarrow x^3 > 1^3 = 1 \quad \text{et donc } x^3 - 1 > 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Méthode 2}}$

On peut factoriser le polynome $x^3 - 1$ en vérifiant :

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - x^2 + x^2 - x + x - 1 = x^3 - 1$$

On calcule ensuite le discriminant de $x^2 + x + 1$:

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$$

Ce trinôme n'a donc pas de racine et il est toujours du signe de 1, c'est-à-dire strictement positif. Autrement dit, le signe de $x^3 - 1$ ne dépend que du signe du facteur $(x - 1)$ et on retrouve les résultats précédents.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x^3 - 1$		$-$	0	$+$	

On peut maintenant étudier le comportement de f au voisinage de 1.

D'une part $\lim\limits_{x\to 1^-} x^3 - 1 = 0^-$ implique $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty}$

D'autre part $\lim\limits_{x\to 1^+} x^3 - 1 = 0^+$ implique $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty}$

2. Pa définition, la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses est asymptote *horizontale* en $+\infty$ et en $-\infty$ à la courbe $\mathcal{C}$ de f.

Toujours par définition, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote *verticale* à $\mathcal{C}$.

Partie 2 . Variations de la fonction

1. Un polynôme étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur son domaine de définition en tant que quotient de fonctions dérivables.
Posons $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x^3 - 1$. Les dérivées sont $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 3x^2$ et nous obtenons pour tout $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{2(x^3 - 1) - (2x + 1)\,3x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-4x^3 - 3x^2 - 2}{(x^3 - 1)^2}$$

Le dénominateur $(x^3 - 1)^2$ étant toujours strictement positif, cette dérivée est du signe de

$$g(x) = -4x^3 - 3x^2 - 2$$

2. a) Calcul de la dérivée :

$$g'(x) = -12x^2 - 6x = -6x(2x + 1)$$

On commence par étudier le signe de ce produit :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$-6x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-12x^2 - 6x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On aura besoin des limites de g pour l'étude du signe de cette fonction :

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} -4x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} -4x^3 = -\infty$$

On peut maintenant dresser le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

Calcul de l'image de $-\frac{1}{2}$: $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -4 \times -\frac{1}{8} - 3 \times \frac{1}{4} - 2 = -\frac{9}{4}$

b) L'étude des variations de g nous montre que pour $x \geq -\frac{1}{2}$, l'équation $g(x) = 0$ ne peut avoir de solution puisque $g(x) < 0$ sur cet intervalle.
Sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$, la fonction g est continue (car dérivable) et strictement décroissante ; l'intervalle image est $\left]-\frac{9}{4}\,;+\infty\right[$ et il contient 0 : l'équation $g(x) = 0$ a donc une solution α et une seule sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$.

c) Une valeur approchée peut - par exemple - être obtenue avec `Geogebra` :
- lancer l'application et demander l'affichage de la fenêtre *Calcul formel*
- enregistrer dans la barre de saisie `g(x) = -4*x^3 -3*x^2 - 2`
- taper dans la première ligne libre de la fenêtre de calcul `nsolve(g(x) = 0 , x)`

On trouve $\alpha \approx -1,14$ (il n'y a en réalité aucun calcul formel là-dedans)

d) Puisque la fonction g est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} x < \alpha & \Rightarrow g(x) > g(\alpha) = 0 \\ x = \alpha & \Rightarrow g(x) = g(\alpha) = 0 \\ \alpha < x < -\dfrac{1}{2} & \Rightarrow g(x) < g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

On sait par ailleurs que pour tout $x \geq -\dfrac{1}{2}$, on a $g(x) < 0$.

3. Comme $f'(x)$ est toujours du signe de $g(x)$, nous pouvons maintenant dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

Partie 3 . Représentation graphique

Lancer `Geogebra` si ce n'est déjà fait . On n'a plus qu'à taper dans la barre de saisie :

`f(x) = (2x + 1) / (x^3 - 1)` pour la courbe

`x = 1` pour l'asymptote verticale

Partie 4 . Étude d'une tangente

1. Une équation réduite de (T) est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

On calcule $f'(0) = -2$ et $f(0) = -1$. D'où l'équation $\boxed{y = -2x - 1}$

2. On calcule la différence entre les fonctions représentées par $(\mathcal{C})$ et (T) :

$$\frac{2x+1}{x^3-1} - (-2x-1) = (2x+1)\left(\frac{1}{x^3-1} + 1\right) = \frac{x^3(2x+1)}{x^3-1}$$

Il reste à étudier le signe de cette différence. On peut remarquer qu'on a déjà étudié le signe de $x^3 - 1$. Le tableau suivant résume les résultats.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
x^3		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^3-1		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^3(2x+1)}{x^3-1}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

D'où les conclusions :

$\mathcal{C}$ est en-dessous de T sur $\left]-\infty\,, -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]0\,, 1\right[$

$\mathcal{C}$ est au-dessus de T sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,, 0\right[\cup \left]1\,, +\infty\right[$

$\mathcal{C}$ et T ont un point commun pour $x = -\dfrac{1}{2}$ et pour $x = 0$

On peut vérifier toutes ces affirmations sur la figure obtenue avec `Geogebra` et en effectuant un zoom suffisant.

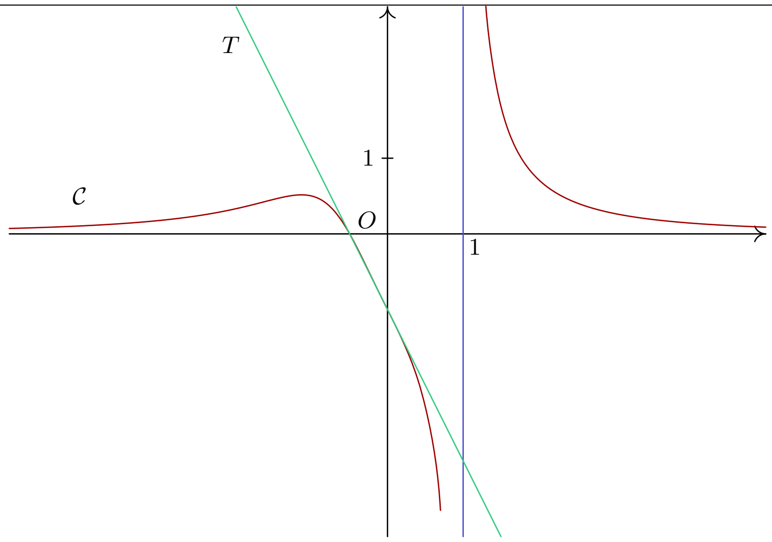

Figure 1 Vue d'ensemble de $\mathcal{C}$, de son asymptote verticale et de la tangente (T)

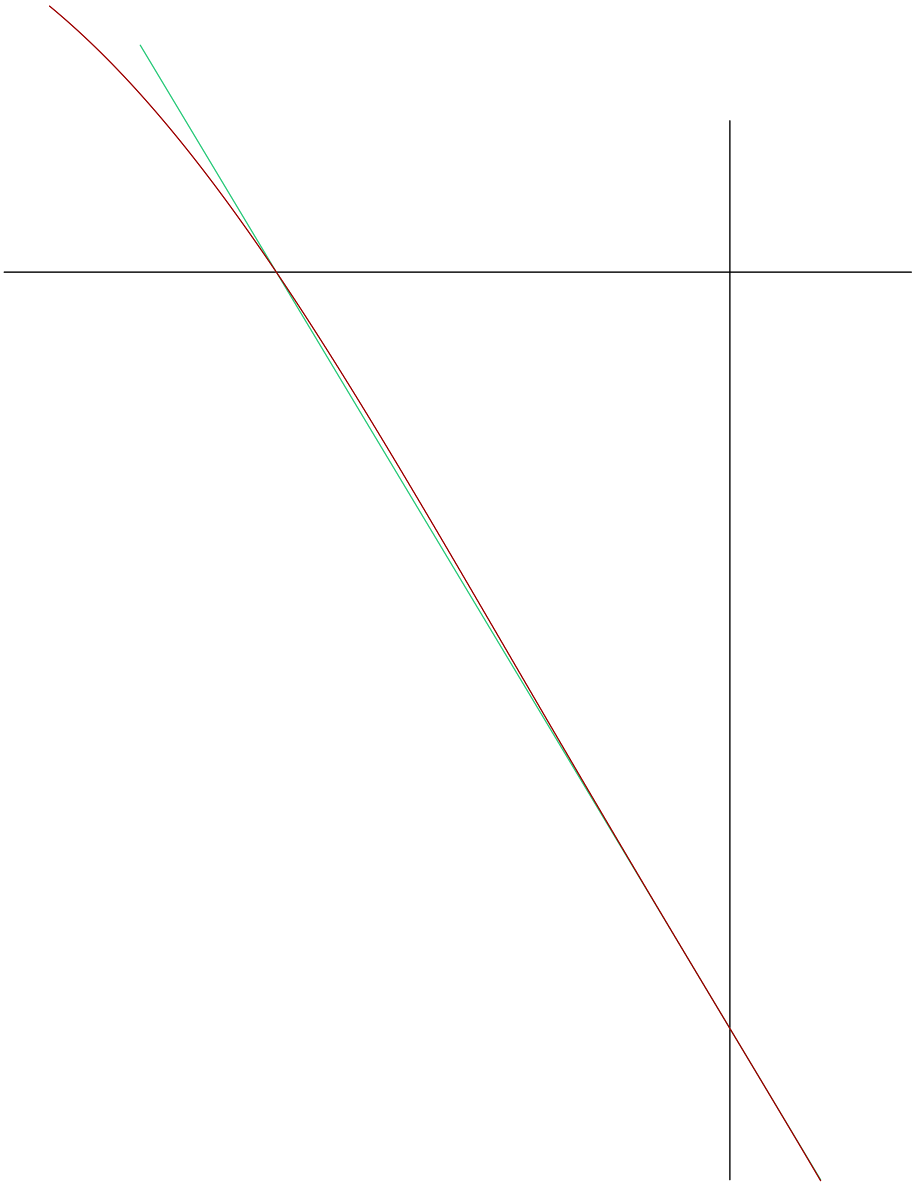

Figure 2 Agrandissement du domaine défini par $-0,8 \leq x \leq 0,2$ et $-1,2 \leq y \leq 0,2$