EXERCICE 1. [5 pts] Probabilités

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Une grossiste achète des boîtes de thé chez deux fournisseurs. Il achète 80% de ses boîtes chez le fournisseur A et 20% chez le fournisseur B.

10% des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20% de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.
On prélève au hasard une boïte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :
- événement A : « *la boîte provient du fournisseur A* »
- événement B : « *la boîte provient du fournisseur B* »
- événement S : « *la boîte présente des traces de pesticides* »

1. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

2. a. Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap \overline{S}$?
b. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.

3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boïtes chez le grossiste précédent. On suppose que ce stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.

3. Calculer la probabilité qu'au moins huit boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Partie C

À des fins publicitaires, le grossiste affiche sur se plaquettes :

« *88% de notre thé est garanti sans trace de pesticides* »

Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. À cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides.

On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à 0,88.

On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.

1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95% .

2. L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95%; que la publicité est mensongère ?

EXERCICE 2. `[6 pts]` **Fonctions**

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = e^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - e^{-x}$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer au mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1. a. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B.

c. En déduire que $b = -a$.

2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation $2(x-1)e^{x} + 1 = 0$.

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 2(x-1)e^{x} + 1$

1. a. Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Calculer la dérivée de la fonction φ et étudier son signe.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.

2. a. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

b. On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.
À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admises dans la partie B.
On note E le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a et F le pont de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $-a$ (a est le nombre réel défini dans la partie B).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point E.

2. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point F.

EXERCICE 3. [4 pts] Complexes, géométrie

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,,\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v})$.
On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2+2i, \quad b = -\sqrt{3}+i, \quad c = 1+i\sqrt{3}, \quad d = -1+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{et} \quad ee = -1+(2+\sqrt{3})i$$

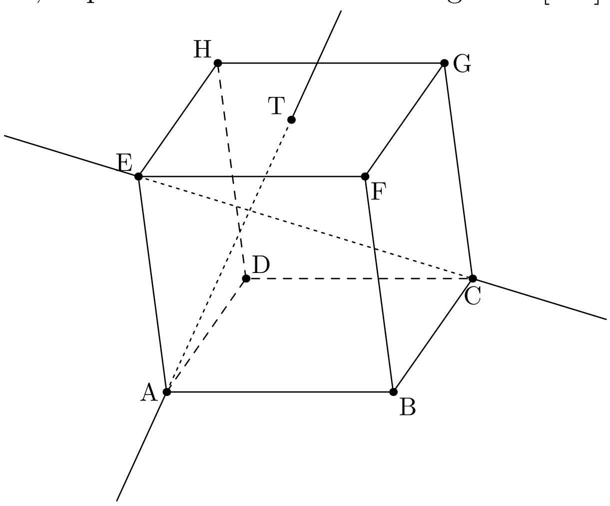
1. **Affirmation 1 :** Les points A, B et C sont alignés.

2. **Affirmation 2 :** Les points B, C et D appertiennent à un même cercle de centre E..

3. Dans cette question, l'espace est muni d'un repère $(O\,,\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\,,\overrightarrow{k})$.
On considère les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0) et K(0 ; 0 ; 1).

   Affirmation 3 : La droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x &= 2-t \\ y &= 6-2t \\ z &= -2+t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ coupe le plan (IJK) au point $\text{E}\left(-\dfrac{1}{2}\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].



   Affirmation 4 : les droites (AT) et (EC) sont othogonales

EXERCICE 4. [5 pts] **Suites**

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 3\,u_n}{3 + u_n}$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $= u_n > 1$.

2. a. Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 0,5\,u_n}{0,5 + u_n}$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1 + 0,5\,u}{0,5 + u}$ Afficher u
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

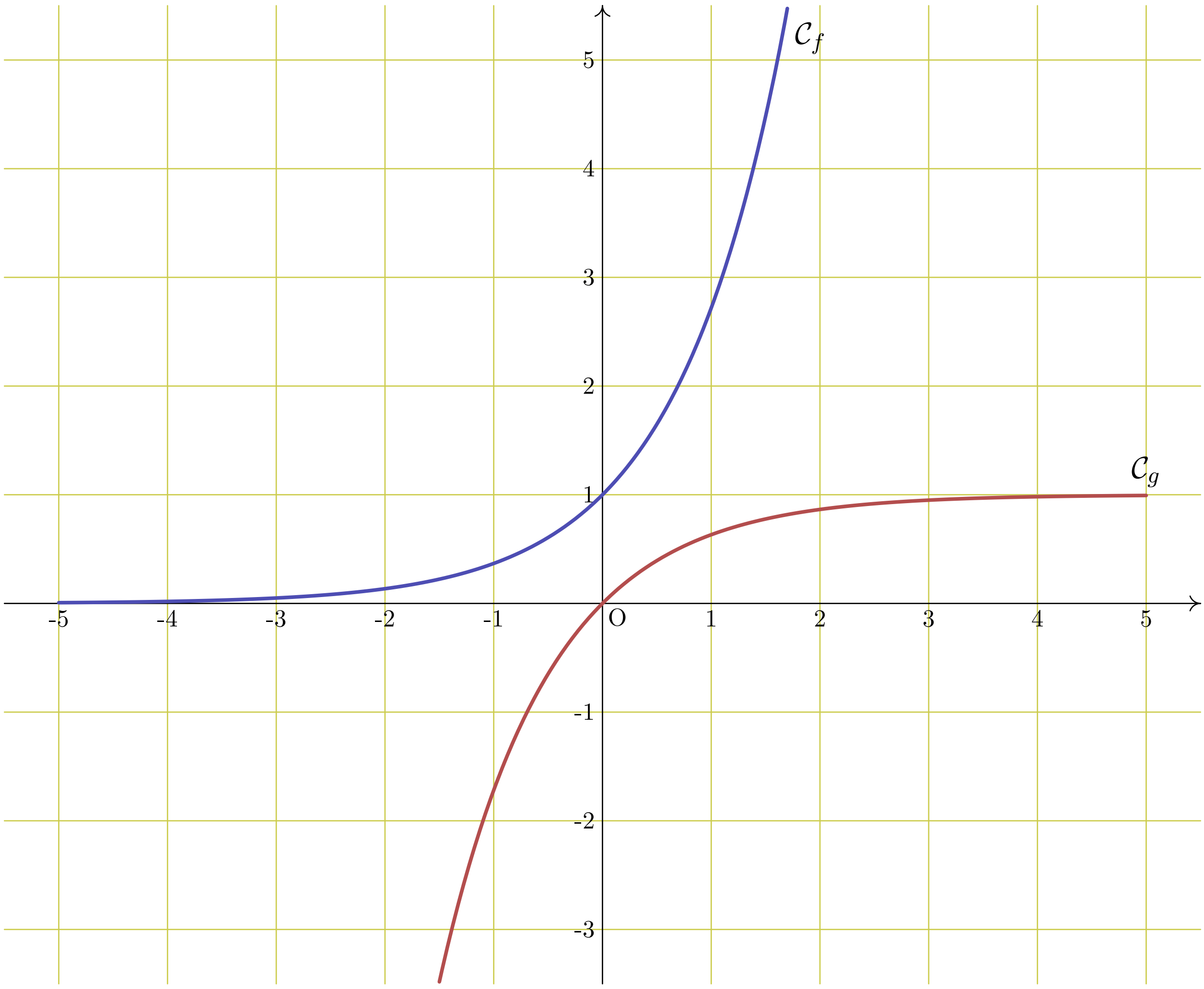
b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Annexe

à rendre avec la copie

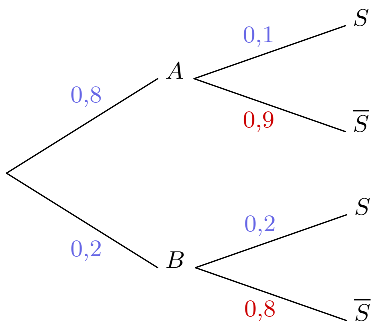
Exercice 2



EXERCICE 1. Probabilités

Partie A

1. Arbre pondéré.



Les probabilités de l'énoncé sont indiquées en bleu et celles qui en sont déduites sont en rouge.

Par exemple le texte donne $P_A(S) = 0,1$ et on en déduit $P_A(\overline{S}) = 1 - 0,1 = 0,9$

2. a. On demande de calculer : $P(B \cap \overline{S}) = P(B) \times P_B(\overline{S}) = 0,2 \times 0,8 = \boxed{0,16}$

b. Pour calculer $P(\overline{S})$, on applique la *formule des probabilités totales* :

$$\begin{aligned} P(\overline{S}) &= P(A \cap \overline{S}) + P(B \cap \overline{S}) \\ &= P(A)\, P_A(\overline{S}) + P(B)\, P_B(\overline{S}) \\ &= 0,8 \times 0,9 + 0,2 \times 0,8 \\ &= \boxed{0,88} \end{aligned}$$

3. On demande ici : $P_S(B) = \dfrac{P(B \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,2 \times 0,2}{1 - 0,88} = \dfrac{0,04}{0,12} \approx \boxed{0,33}$

Partie B

1. Dans le cas d'un tirage avec remise, la même expérience est répétée 10 fois et les résultats sont indépendants.
La variable aléatoire X qui est égale au nombre de boîtes sans pesticide suit d'après le cours, une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$.

2. On demande la probabilité de l'événement $(X = 10)$. Le cours donne le résultat :

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} 0,88^{10}\, 0,12^0 \approx \boxed{0,28}$$

3. On demande la probabilité de l'événement $(X \geq 8)$:

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= 45 \times 0,88^8 \times 0,12^2 + 10 \times 0,88^9 \times 0,12 + 0,88^{10} \\ &\approx 0,89 \end{aligned}$$

Partie C

1. Dans cette question, on connaît

- la proportion de boîtes sans pesticide dans la population : $p = 0,88$
- la taille de chaque échantillon : $n = 50$

On vérifie $n \geq 30$, $np = 44 \geq 5$ et $n(1-p) = 6 \geq 5$.
L'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence des boîtes sans pesticide au seuil de 95% est alors :

$$\left[p - 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\;;p + 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Les bornes de cet intervalle sont approximativement 0,79 et 0,97 .

2. La fréquence constatée de boîtes sans pesticides dans l'échantillon prélevé est

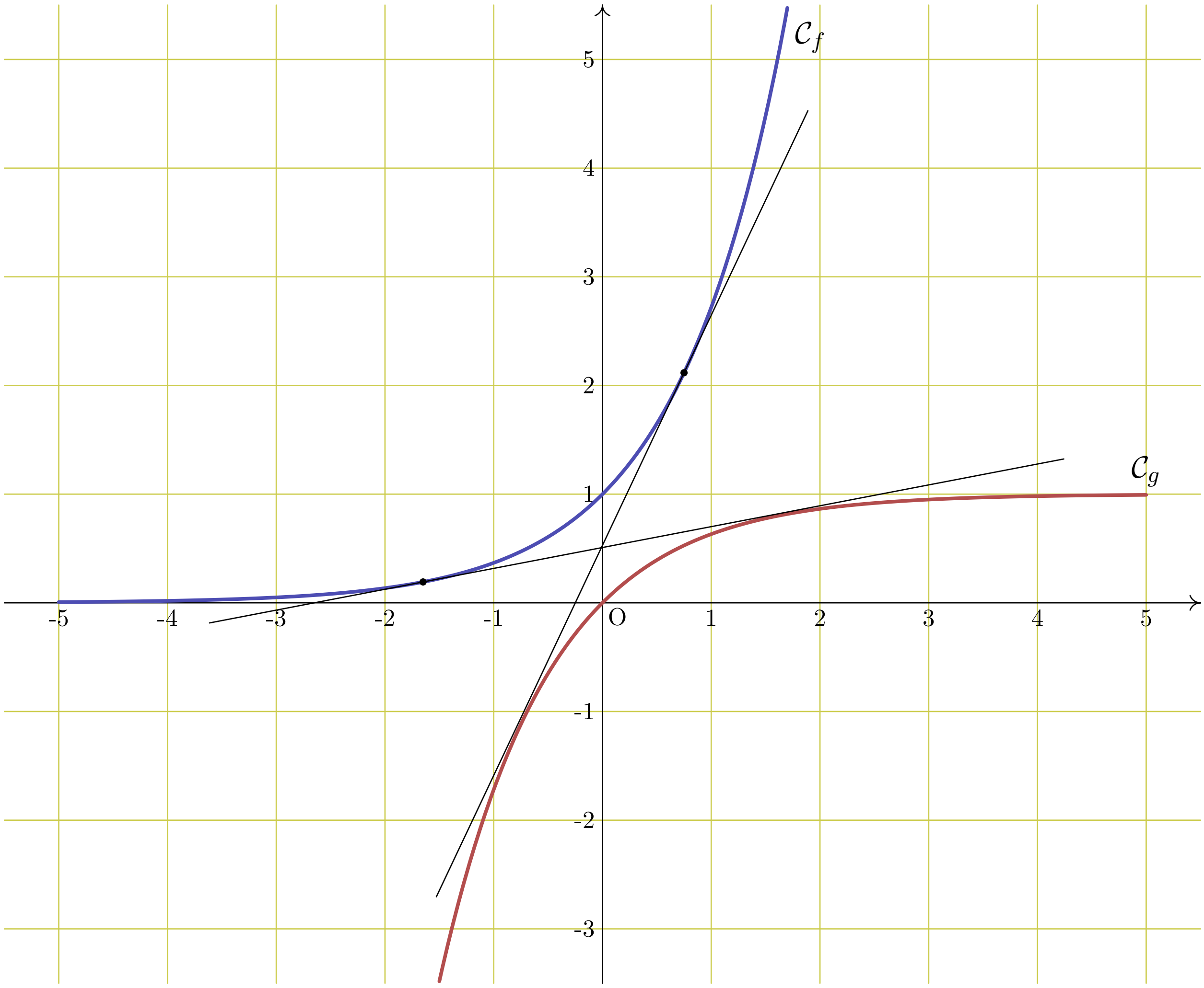
$$f = \frac{50-12}{50} = 0,76$$

Cette fréquence n'étant pas dans l'intervalle déterminé à la question précédente, on peut estimer que la publicité est mensongère.

EXERCICE 2. Fonctions

Partie A

Figure : tracé des tangentes communes aux deux courbes.



Partie B

1. a. Coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a : $f'(a) = e^a$.

b. Coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse b : $g'(b) = e^{-b}$.

c. Le coefficient directeur d'une droite étant unique, on a : $e^{-b} = e^a \iff b = -a$.

2. La tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse b a pour équation réduite :

$$y = g'(b)(x-b) + g(b) \iff y = e^{-b}(x-b) + 1 - e^{-b}$$

Elle passe par le point A de coordonnées $(a\,, e^a)$; les coordonnées de ce point vérifient donc l'équation précédente :

$$e^a = e^{-b}(a-b) + 1 - e^{-b}$$

En remplaçant b par $-a$, on obtient :

$$e^a = 2a\,e^a + 1 - e^a \iff 0 = 2(a-2)\,e^a + 1$$

Le réel a est donc solution de l'équation $2(x-1)e^x + 1 = 0$.

Partie C

1. a. On développe l'expression de $\varphi(x)$ pour lever l'indétermination en $-\infty$:
$$\varphi(x) = 2xe^x - 2e^x + 1$$
D'après le cours :
- d'une part (croissance comparée) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$
- et d'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

On en déduit par produit puis par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 1}$.

Il n'y a pas d'indétermination en $+\infty$ avec la forme initiale.
$$\lim_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \text{ impliquent } \boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty}$$

b. Calcul de la dérivée de la fonction φ.
On pose $u(x) = 2(x-1)$ et $v(x) = e^x$, ce qui entraîne $u'(x) = 2$ et $v'(x) = e^x$. On applique la formule de dérivation d'un produit :
$$\varphi'(x) = 2e^x + 2(x-1)e^x = 2xe^x$$
Comme l'exponentielle est strictement positive, cette dérivée est du signe de x.

c. Tableau de variation de φ.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction admet pour minimum $\varphi(0) = -2e^0 + 1 = -1$

2. a. La fonction φ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,, 0]$: l'intervalle image est donc $\left[\varphi(0)\,, \lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)\right[= [-1\,, 1[$; puisque cet intervalle contient 0, l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution α et une seule dans $]-\infty\,, 0]$.
La fonction φ est continue et strictement croissante sur $[0\,, +\infty[$: l'intervalle image est donc $\left[\varphi(0)\,, \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)\right[= [-1\,, +\infty[$; puisque cet intervalle contient 0, l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution β et une seule dans $[0\,, +\infty[$.

b. On peut encadrer α et β par balayage .

$\varphi(-2) \approx 0,19 > 0$	et	$\varphi(-1) \approx -0,47 < 0$	$\Longrightarrow$	$-2 < \alpha < -1$
$\varphi(-1,7) \approx 0,01 > 0$	et	$\varphi(-1,6) \approx -0,05 < 0$	$\Longrightarrow$	$-1,7 < \alpha < -1,6$
$\varphi(-1,68) \approx 0,001 > 0$	et	$\varphi(-1,67) \approx -0,005 < 0$	$\Longrightarrow$	$-1,68 < \alpha < -1,67$
$\varphi(0) = -1 < 0$	et	$\varphi(1) = 1 > 0$	$\Longrightarrow$	$0 < \beta < 1$
$\varphi(0,7) \approx -0,21 < 0$	et	$\varphi(0,8) \approx 0,11 > 0$	$\Longrightarrow$	$0,7 < \beta < 0,8$
$\varphi(0,76) \approx -0,03 < 0$	et	$\varphi(0,77) \approx 0,007 > 0$	$\Longrightarrow$	$0,76 < \beta < 0,77$

Partie D

1. Les coordonnées de E sont $(a\,,e^a)$ et les coordonnées de F sont $(-a\,,1-e^a)$. Appelons provisoirement (T) la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point E. Cette droite a pour équation :

$$y = e^a(x-a)+e^a$$

Elle passe par F lorsque :

$$1-e^a = -2a\,e^a + e^a \iff 2(a-1)e^a+1=0$$

Or a est solution de l'équation $2(x-1)e^x+1=0$. Donc la tangente (T) est confondue avec la droite (EF).

2. Appelons provisoirement (T') la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point F. Cette droite a pour équation :

$$y = e^a(x+a)+1-e^a$$

Elle passe par E lorsque :

$$e^a = 2a\,e^a+1-e^a \iff 0=2(a-1)e^a+1$$

Or a est solution de l'équation $2(x-1)e^x+1=0$. Donc la tangente (T') est confondue avec la droite (EF).

EXERCICE 3. Complexes, géométrie

1. VRAI

On calcule l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $b - a = -\sqrt{3} - 2 - i$

On calcule ensuite l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AC}$: $c - a = -1 + i(\sqrt{3} - 2)$

Les points sont alignés lorsque le quotient de ces deux différences est un nombre réel :

$$\begin{aligned}\frac{-\sqrt{3}-2-i}{-1+i(\sqrt{3}-2)} &= \frac{-\sqrt{3}-2-i}{-1+i(\sqrt{3}-2)} \times \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2}\\ &= \frac{-\sqrt{3}-2-i}{-\sqrt{3}-2-i} \times (\sqrt{3}+2)\\ &= \sqrt{3}+2\end{aligned}$$

2. FAUX

On calcule les trois distances :

$\mathrm{EB} = |b - e| = \left|-\sqrt{3} + 1 + i(-1 - \sqrt{3})\right| = \sqrt{(-\sqrt{3}+1)^2 + (-\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\mathrm{EC} = |c - e| = |2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\mathrm{ED} = |d - e| = \left|\left(-2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) i\right| = 2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

On vérifie pour finir $2\sqrt{2} \approx 2,83$ et $2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 2,87$, ce qui montre que l'affirmation est fausse.

3. VRAI

On commence par déterminer une équation cartésienne du plan (IJK) . Pour cela, on calcule les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

On vérifie au passage que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc que les trois points I, J et K détermine un plan.

Un vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(a\,;b\,;c)$ est normal au plan (IJK) lorsque :

$$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{IJ} &= 0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{IK} &= 0\end{cases} \iff \begin{cases}-a+b &= 0\\ -a+c &= 0\end{cases}$$

Une solution de ce système est de façon évidente le triplet $(1\,;1\,;1)$: on peut donc écrire que $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal à (IJK).

Par conséquent un point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de l'espace appartient à (IJK) lorsque :

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{IM} = 0 \iff 1\times(x-1) + 1\times(y-0) + 1\times(z-0) = 0 \iff \boxed{x+y+z-1=0}$$

On détermine les points communs à $\mathcal{D}$ et à (IJK) en reportant dans cette équation cartésienne les expressions des coordonnées en fonction du paramètre t :

$$2 - t + 6 - 2t - 2 + t - 1 = 0 \iff 5 - 2t = 0$$

Cette équation a une solution $t = \dfrac{5}{2}$. La droite $\mathcal{D}$ et le plan (IJK) ont donc un point commun et les coordonnées de ce point sont :

$$\begin{cases} x &= 2-\dfrac{5}{2} &= -\dfrac{1}{2} \\ y &= 6-2\times\dfrac{5}{2} &= 1 \\ z &= -2+\dfrac{5}{2} &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On retrouve les coordonnées du point E .

4. VRAI

On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On commence par déterminer les coordonnées des points F, H et T puis les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AT}$:

$$F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad H\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AT}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}$$

On détermine ensuite les coordonnées de E, de C et de $\overrightarrow{EC}$:

$$E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont orthogonaux car :

$$\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 1+1\times -1 = 1-1 = 0$$

Les droites (AT) et (EC) sont donc orthogonales.

EXERCICE 4. Suites

Partie A

1. Il s'agit de prouver, pour tout entier naturel n : $u_n > 1$
On remarque au préalable que cette propriété est équivalente à : $u_n - 1 > 0$
On procède par récurrence :

- pour $n = 0$, $u_0 = 2$ vérifie bien $u_0 > 1$
- supposons que pour un certain entier n on ait vérifié $u_n > 1$
  on calcule la différence :
  $$u_{n+1} - 1 = \frac{1 + 3\,u_n}{3 + u_n} - 1 = \frac{-2 + 2\,u_n}{3 + u_n} = 2\,\frac{u_n - 1}{u_n + 3}$$
  sachant $u_n > 1$, nous obtenons $\dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} > 0$ et donc $u_{n+1} > 1$
  la propriété à démontrer est héréditaire
- nous pouvons donc conclure que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 1$

2. a. Calcul de la différence entre deux termes consécutifs :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1 + 3\,u_n}{3 + u_n} - u_n \\ &= \frac{1 + 3\,u_n - 3u_n - u_n^2}{3 + u_n} \\ &= \frac{1 - u_n^2}{3 + u_n} \\ &= \boxed{\frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}} \end{aligned}$$

b. Nous savons d'après la question précédente que $1 - u_n < 0$, $1 + u_n > 0$ et $3 + u_n > 0$.
Par conséquent la différence $u_{n+1} - u_n$ est strictement négative et la suite (u_n) est décroissante.
La suite (u_n) converge puisqu'elle est décroissante et minorée.

Partie B

1. Tableau des résultats.

i	1	2	3
u	0,8	1,077	0,976

2. La suite (u_n) semble être convergente vers 1 .

3. a. Calcul de v_{n+1} successivement en fonction de u_{n+1} , de u_n puis de v_n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} \\ &= \frac{\dfrac{1 + 0,5\,u_n}{0,5 + u_n} - 1}{\dfrac{1 + 0,5\,u_n}{0,5 + u_n} + 1} = \frac{1 + 0,5\,u_n - 0,5 - u_n}{1 + 0,5\,u_n + 0,5 + u_n} = \frac{0,5 - 0,5\,u_n}{1,5 + 1,5\,u_n} = -\frac{0,5}{1,5} \cdot \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \\ &= \boxed{-\frac{1}{3}\,v_n} \end{aligned}$$

b. On vérifie $v_0 = \dfrac{1}{3}$, ce qui implique : $\boxed{v_n = \dfrac{1}{3} \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}$.

4. a. On calcule la différence : $v_n - 1 = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1} - 1 = \dfrac{-2}{u_n + 1}$
Puisque $u_n > 0$, cette différence est toujours strictement négative : on en déduit $v_n < 1$ et donc $v_n \neq 1$.

b. Par définition $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$
On en déduit $1 + v_n = \dfrac{2u_n}{u_n + 1}$ et $1 - v_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$
On peut alors calculer le quotient de ces deux expressions : $\dfrac{1 + v_n}{1 - v_n} = u_n$

c. Sachant $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$, on a d'après le cours $\lim \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ et donc $\lim v_n = 0$
Par application des théorèmes usuels, on a finalement $\boxed{\lim u_n = 1}$