EXERCICE 1. [4 pts] **Probabilités**

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs :
35% des plants proviennent de l'horticulteur H_1,
25% de l'horticulteur H_2
et le reste de l'horticulteur H_3.
Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80% de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30%.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
On envisage les événements suivants :
- H_1 : « *l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur* H_1 »
- H_2 : « *l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur* H_2 »
- H_3 : « *l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur* H_3 »
- C : « *l'arbre choisi est un conifère* »
- F : « *l'arbre choisi est un arbre feuillu* »

a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

c. Justifier que la probabilité de l'événement C est 0,525

d. L'arbre choisi est un conifère.
Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3} .

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans la stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans la stock.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

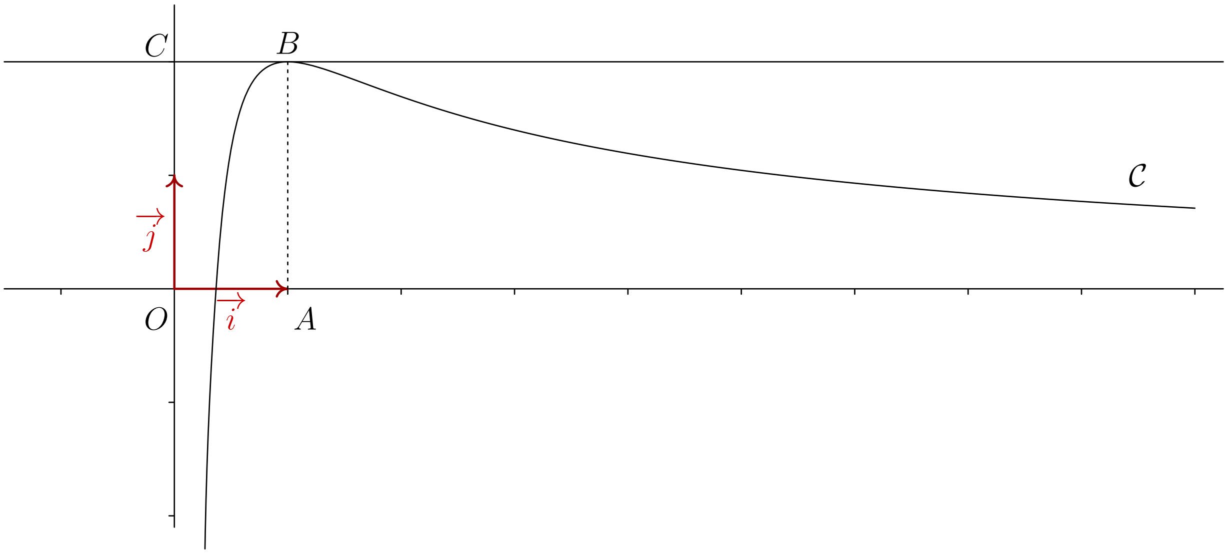
a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ? On arrondira à 10^{-3}.

c. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte au moins deux arbres feuillus ? On arrondira à 10^{-3}.

EXERCICE 2. [7 pts] Fonctions

Sur le graphique c-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1\,,0)$, $(1\,,2)$, $(0\,,2)$
- la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}$$

1. a. En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$.

b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$

c. En déduire les réels a et b .

2. a. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,,+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\,\dfrac{\ln x}{x}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,,1]$.

b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1\,,+\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.

Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous

Variables :	a, b et m sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0
	Affecter à b la valeur 1
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$
	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m
	Sinon Affecter à b la valeur m
	Fin de Si
	Fin de Tant que
Sortie :	Afficher a
	Afficher b

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a					
b					
$b-a$					
m					

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'i affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.

a. Justifier que cela revient à démontrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx = 1$.

b. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

EXERCICE 3. [4 pts] **Complexes, géométrie**

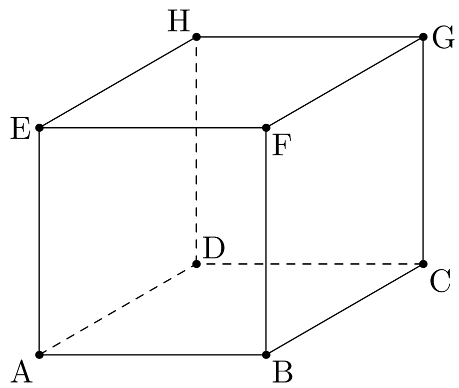
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z-i| = |z+1|$ est une droite.

2. **Proposition 2 :** Le nombre complexe $(1+i\sqrt{3})^4$ est un nombre réel.

3. Soit ABCDEFGH un cube.

   Proposition 3 : les droites (EC) et (BG) sont othogonales



4. L'espace est muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$.
   Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $x+y+3z+4=0$.
   On note S le point de coordonnées $(1\,,2\,,-2)$.

   Proposition 4 : La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x &= 2+t \\ y &= -1+t \\ z &= 1+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

EXERCICE 4. [5 pts] Suites

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}\,u_n + \frac{1}{3}\,n + 1\ .$$

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leq n + 3$$

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par v_n la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

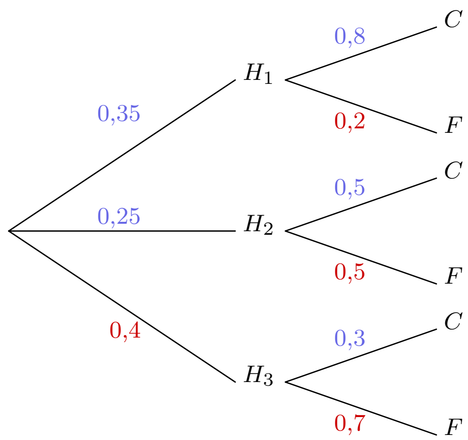
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}$$

a. Exprimer S_n en fonction de n .

b. Déterminer la limite de la suite (T_n).

EXERCICE 1. Probabilités

1. a. Arbre pondéré.



Les probabilités de l'énoncé sont indiquées en bleu et celles qui en sont déduites sont en rouge.
Par exemple le texte donne $P(H_1) = 0,35$ et $P(H_2) = 0,25$, ce qui implique

$$P(H_3) = 1 - 0,35 - 0,25 = 0,4$$

De même le texte donne $P_{H_1}(C) = 0,8$ et on en déduit $P_{H_1}(F) = 1 - 0,8 = 0,2$

b. On demande ici : $P(H_3 \cap C) = 0,4 \times 0,3 = \boxed{0,12}$

c. Pour calculer $P(C)$, on applique la *formule des probabilités totales* :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(H_1 \cap C) + P(H_2 \cap C) + P(H_3 \cap C) \\ &= P(H_1)\, P_{H_1}(C) + P(H_2)\, P_{H_2}(C) + P(H_3)\, P_{H_3}(C) \\ &= 0,28 + 0,125 + 0,12 \\ &= \boxed{0,525} \end{aligned}$$

d. On demande ici : $P_C(H_1) = \dfrac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,28}{0,525} \approx \boxed{0,533}$

2. a. Dans ce cas, la même expérience est répétée 10 fois et les résultats sont indépendants car on assimile le choix à un tirage avec remise.
La variable aléatoire X est égale au nombre de conifères choisis donc au nombre de *succès* si on convient d'appeler *succès* l'événement C. Cette variable aléatoire suit d'après le cours, une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,525$.

b. On demande de calculer $P(X = 5)$. Le cours donne le résultat :

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} 0,525^5\, 0,475^5 \approx \boxed{0,243}$$

c. Dire qu'il y a « *au moins deux arbres feuillus* » revient à dire qu'il y a « *au plus huit conifères* » .
Or l'événement contraire de $(X \leq 8)$ est $(X \geq 9)$:

$$P(X \leq 8) = 1 - P(X = 9) - P(X = 10) = 1 - 10 \times 0,525^9 \times 0,475 - 0,525^{10} \approx 0,984$$

EXERCICE 2. Fonctions

1. a. On sait que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $B(1\,,2)$; cela implique $\boxed{f(1)=2}$
Puisque B et C ont la même ordonnée 2, la droite (BC)est horizontale et a pour équation cartésienne $y=2$.
On sait que cette droite est tangente en B à la courbe $\mathcal{C}$: le coefficient directeur de (BC) est donc le nombre dérivé de la fonction f en $x=1$: $\boxed{f'(1)=0}$

b. On pose $u(x)=a+b\ln x$ et $v(x)=x$ de sorte que $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$.
On calcule $u'(x)=\dfrac{b}{x}$, $v'(x)=1$ et on applique la formule de dérivation d'un quotient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{b}{x}\cdot x-(a+b\ln x)}{x^2} \\ &= \boxed{\frac{(b-a)-b\ln x}{x^2}} \end{aligned}$$

c. On traduit les deux résultats de la question **1. a.** :

$$\begin{aligned} f(1)=2 &\iff \frac{a}{1}=2 &&\iff a=2 \\ f'(1)=0 &\iff \frac{b-a}{1}=0 &&\iff b=a=2 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f(x)=\dfrac{2+2\ln x}{x}=\dfrac{2}{x}+2\,\dfrac{\ln x}{x}}$

2. a. $f'(x)=\dfrac{-2\ln x}{x^2}$ est toujours du signe de $-\ln x$ car $x^2>0$
On a les trois résultats suivants :

$$\begin{cases} -\ln x=0 & \iff x=1 \\ -\ln x>0 & \iff \ln x<0 \iff 0<x<1 \\ -\ln x<0 & \iff \ln x>0 \iff 1<x \end{cases}$$

b. En 0, on utilise $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$:

$$\lim_{x\to 0} 2+2\ln x=-\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty \text{ implique } \boxed{\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty}$$

En $+\infty$, on lève l'indétermination en écrivant $f(x)=\dfrac{2}{x}+2\,\dfrac{\ln x}{x}$ et en utilisant l'un des résultats sur la croissance comparée :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \text{ implique } \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=0}$$

c. Tableau de variations.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↘	0

3. a. f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0\,,1]$ sur $]-\infty\,,2]$: l'intervalle image est alors $]-\infty\,,2]$: puisque cet intervalle contient 1, l'équation $f(x)=1$ a une solution α et une seule dans $]0\,,1]$

b. On vérifie : $f(5) \approx 1,04$ et $f(6) \approx 0,93$; donc $5 < \beta < 6$

4. a. Tableau

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	0,5	0,25	0,375	0,4375	0,46875

b. a et b sont les bornes d'un encadrement de α à 10^{-1} près.

c. Dans la partie initialisation, il suffit d'affecter à a et b respectivement 5 et 6.

5. a. La courbe $\mathcal{C}$ partage le rectangle $OABC$ en deux domaines. Le domaine situé à droite est délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, la droite $x = k$ où k désigne l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de Ox, et la droite $x = 1$.
On vérifie $f(1/e) = 0$, ce qui implique $k = 1/e$ et donc f positive sur $[1/e\,, 1]$.
L'aire du domaine situé à droite est alors $\displaystyle\int_{1/e}^{1} f(x)dx$.
L'aire du rectangle est égale à 2 : il s'agit donc de montrer que cette aire est égale à 1.

b. On vérifie alors qu'une primitive de f sur $]0\,, +\infty[$ est $F(x) = 2\ln x + (\ln x)^2$
Donc l'aire mesure $F(1) - F(1/e) = 0 - (-2 + 1) = 1$.

EXERCICE 3. Complexes, géométrie

1. VRAI
Soient A et B les points d'affixes respectives i et -1. Si M est un point du plan d'affixe z, alors :
$$|z-i| = |z_M - z_A| = AM \quad \text{et} \quad |z+1| = |z_M - z_B| = BM$$
L'ensemble des points M tels que $AM = BM$ est la médiatrice de $[AB]$.

2. FAUX
On peut par exemple déterminer la forme algébrique de l'expression :
$(1+i\sqrt{3})^2 = -2+2i\sqrt{3}$ implique $(1+i\sqrt{3})^4 = -8-8i\sqrt{3}$: ce n'est pas un réel puisque sa partie imaginaire est différente de 0
On peut également déterminer la forme trigonométrique de l'expression :
$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ implique $(1+i\sqrt{3})^4 = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}$: on n'obtient pas un réel car les réels ont pour arguments les nombres de la forme $k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

3. VRAI
On se place dans le repère $(D\,,\overrightarrow{DA}\,,\overrightarrow{DC}\,,\overrightarrow{DH})$.
On calcule les coordonnées de deux points puis d'un vecteur directeur de chaque droite :
$$E\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$
$$B\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad G\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$
D'où le produit scalaire : $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{BG} = -1\times -1 + 1\times 0 + -1\times 1 = 0$
Les deux droites sont orthogonales.

4. VRAI
Le vecteur $\overrightarrow{n}(1\,,1\,,3)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ et est aussi un vecteur directeur de la droite proposée : cette droite est donc perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
Pour $t=-1$, le système de l'énoncé permet de retrouver les coordonnées du point S : la droite passe donc par S.

EXERCICE 4. Suites

1. **a.** $u_1 = \frac{2}{3} \times u_0 + \frac{1}{3} \times 0 + 1 = \frac{7}{3} \approx 2,33$ $\quad u_2 = \frac{2}{3} \times u_1 + \frac{1}{3} \times 1 + 1 \approx 2,89$

$u_3 = \frac{2}{3} \times u_2 + \frac{1}{3} \times 2 + 1 = \approx 3,59$ $\quad u_4 = \frac{2}{3} \times u_3 + \frac{1}{3} \times 3 + 1 = \approx 4,4$

b. La suite (u_n) paraît être croissante.

2. **a.** On procède par récurrence

- pour $n = 0$, $u_n = 2$ et $n + 3 = 3$: le résultat est vrai
- supposons $u_n \leq n + 3$ pour un certain entier n ; on obtient :

$$u_{n+1} \leq \frac{2(n+3)}{3} + \frac{n}{3} + 1 = n + 3 \leq n + 4$$

- le résultat est vrai pour tout $n \geq 0$

b. Calcul de la différence entre deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

c. On a vu $u_n \leq n + 3$, ce qui implique $n + 3 - u_n \geq 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$
La suite (u_n) est par conséquent croissante.

3. **a.** La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ car pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}v_n$$

b. Sachant $v_0 = u_0 = 2$, on a d'après le cours : $v_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^3$

On en déduit : $u_n = v_n + n = \boxed{2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n}$

c. Sachant $-1 < \frac{2}{3} < 1$, il vient $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ puis $\lim u_n = +\infty$

4. **a.** D'une part : $2\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2\,\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 6\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$

D'autre part : $0 + 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Donc $S_n = 6\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$

b. On divise tout par n^2 :

$$T_n = \frac{6}{n^2}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

En utilisant $\lim \frac{1}{n^2} = \lim \frac{1}{n} = \lim \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$, on obtient $\boxed{\lim T_n = \frac{1}{2}}$