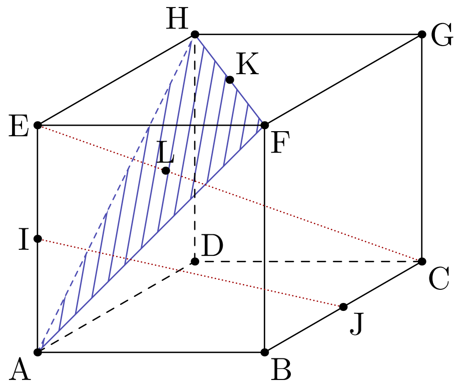
EXERCICE 1. [5 pts] Géométrie

Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé$(\mathbf{A}\,;\overrightarrow{\mathbf{AB}}\,,\overrightarrow{\mathbf{AD}}\,,\overrightarrow{\mathbf{AE}})$:

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1
on appelle $\mathcal{P}$ le plan (AFH)
le point I est le milieu du segment [AE]
le point J est le milieu du segment [BC]
le point K est le milieu du segment [HF]
le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan $\mathcal{P}$



Ceci est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

1. **a.** Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
b. Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
c. Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.
d. Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.

2. **a.** Le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ est égal à 0 .
b. Le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ est égal à (-1) .
c. Le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ est égal à 1 .
d. Le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ est égal à 2 .

3. Dans le repère orthonormé $(\mathbf{A}\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$,
a. le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y+z-1=0$.
b. le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x-y+z=0$.
c. le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $-x+y+z=0$.
d. le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x+y-z=0$.

4. **a.** $\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
b. $\overrightarrow{\mathrm{EL}}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
c. $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
d. $\overrightarrow{\mathrm{DI}}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

5. **a.** $\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$
b. $\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AK}}$
c. $\overrightarrow{\mathrm{ID}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$
d. $\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

EXERCICE 2. [5 pts] Probabilités

Partie A

Soit n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1 et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n.
On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.
En déduire que l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la fréquence p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un quuestionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi trois réponses possibles notées A, B et C, la bonne réponse étant A.
On note r la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (de façon équiprobable).

1. On interroge un étudiant au hasard. On note :
A l'événement « l'étudiant répond A »
B l'événement « l'étudiant répond B »
C l'événement « l'étudiant répond C »
R l'événement « l'étudiant connaît la bonne réponse »
$\overline{\text{R}}$ l'événement contraire de R

a. Traduire cette situation par un arbre de probabilités .

b. Montrer que la probabilité de l'événement A est $\text{P(A)} = \dfrac{1}{3}(1 + 2r)$.

c. Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisi A connaisse la bonne réponse.

2. Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

a. Donner la loi de X et ses paramètres n et p en fonction de r

b. Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.
Donner un intervalle de confiance au seuil de 95% de l'estimation de p .
En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95% de l'estimation de r .

c. Dans la suite, on suppose que $r = 0,4$. Compte tenu du grand nombre d'étudiants, on considèrera que X suit une loi normale.

i. Donner les paramètres de cette loi normale.

ii. Donner une valeur approchée de $P(X \leq 250)$ à 10^{-2} près.
On pourra s'aider de la table en annexe 1, qui donne une valeur approchée de $P(X \leq t)$ où X est la variable aléatoire de la question **2. c.**

EXERCICE 3. [5 pts] **Fonctions**

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = (x+1)e^x$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)e^x$.

3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - me^{-x}$$

On note $\mathcal{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$ du plan.

1. a. Démontrer que $g(m) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.

b. Déduire de la **partie A**, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.

2. On a représenté en annexe 2 les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_e$ et $\mathcal{C}_{-e}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0 , e et $-e$).
Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.

3. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_m$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ suivant la valeur du réel m.

4. a. On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_e$, $\mathcal{C}_{-e}$, l'axe (Oy) et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur l'annexe 2.

b. Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}_e$, $\mathcal{C}_{-e}$, l'axe (Oy) et la droite Δ_a $x = a$. On désigne par $\mathcal{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan exprimée en unités d'aire.
Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathcal{A}(a) = 2e - 2e^{1-a}$.
En déduire la limite de $\mathcal{A}(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4. [5 pts] **Complexes**

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par : $z_0 = 1 + i$ et, pour tout entier naturel n, par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + ib_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.
Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0

2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et que $b_1 = \dfrac{1}{3}$.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	A et B des nombres réels
	K et N des nombres entiers
Initialisation :	Affecter à A la valeur 1
	Affecter à B la valeur 1
Traitement :	Entrez la valeur de N
	Pour K variant de 1 à N
	Affecter à A la valeur $\dfrac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{3}$
	Affecter à B la valeur $\dfrac{B}{3}$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher A

a. On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans l'exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de b_n.

2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de la suite (b_n).

3. a. On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

$$\left|z + z'\right| \leq |z| + \left|z'\right| \quad \text{(inégalité triangulaire)} .$$

Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+}| \leq \frac{2\,|z_n|}{3}$$

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leq u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

Annexe 1

Exercice 2

E12 =LOI.NORMALE($A12+E$1;240;RACINE(96);1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
2	235	0,305	0,309	0,312	0,316	0,319	0,323	0,327	0,330	0,334	0,338	
3	236	0,342	0,345	0,349	0,353	0,357	0,360	0,364	0,368	0,372	0,376	
4	237	0,380	0,384	0,388	0,391	0,395	0,399	0,403	0,407	0,411	0,415	
5	238	0,419	0,423	0,427	0,431	0,435	0,439	0,443	0,447	0,451	0,455	
6	239	0,459	0,463	0,467	0,472	0,476	0,480	0,484	0,488	0,492	0,496	
7	240	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,533	0,537	
8	241	0,541	0,545	0,549	0,553	0,557	0,561	0,565	0,569	0,573	0,577	
9	242	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	0,601	0,605	0,609	0,612	0,616	
10	243	0,620	0,624	0,628	0,632	0,636	0,640	0,643	0,647	0,651	0,655	
11	244	0,658	0,662	0,666	0,670	0,673	0,677	0,681	0,684	0,688	0,691	
12	245	0,695	0,699	0,702	0,706	0,709	0,713	0,716	0,720	0,723	0,726	
13	246	0,730	0,733	0,737	0,740	0,743	0,746	0,750	0,753	0,756	0,759	
14	247	0,763	0,766	0,769	0,772	0,775	0,778	0,781	0,784	0,787	0,790	
15	248	0,793	0,796	0,799	0,802	0,804	0,807	0,810	0,813	0,815	0,818	
16	249	0,821	0,823	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839	0,841	0,844	
17	250	0,846	0,849	0,851	0,853	0,856	0,858	0,860	0,863	0,865	0,867	
18	251	0,869	0,871	0,874	0,876	0,878	0,880	0,882	0,884	0,886	0,888	
19	252	0,890	0,892	0,893	0,895	0,897	0,899	0,901	0,903	0,904	0,906	
20	253	0,908	0,909	0,911	0,913	0,914	0,916	0,917	0,919	0,921	0,922	
21	254	0,923	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932	0,933	0,935	0,936	
22	255	0,937	0,938	0,940	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945	0,947	0,948	
23	256	0,949	0,950	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,956	0,957	0,958	
24	257	0,959	0,960	0,960	0,961	0,962	0,963	0,964	0,965	0,965	0,966	
25	258	0,967	0,968	0,968	0,969	0,970	0,970	0,971	0,972	0,972	0,973	
26	259	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,977	0,978	0,978	0,979	
27	260	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982	0,982	0,983	0,983	0,984	
28												

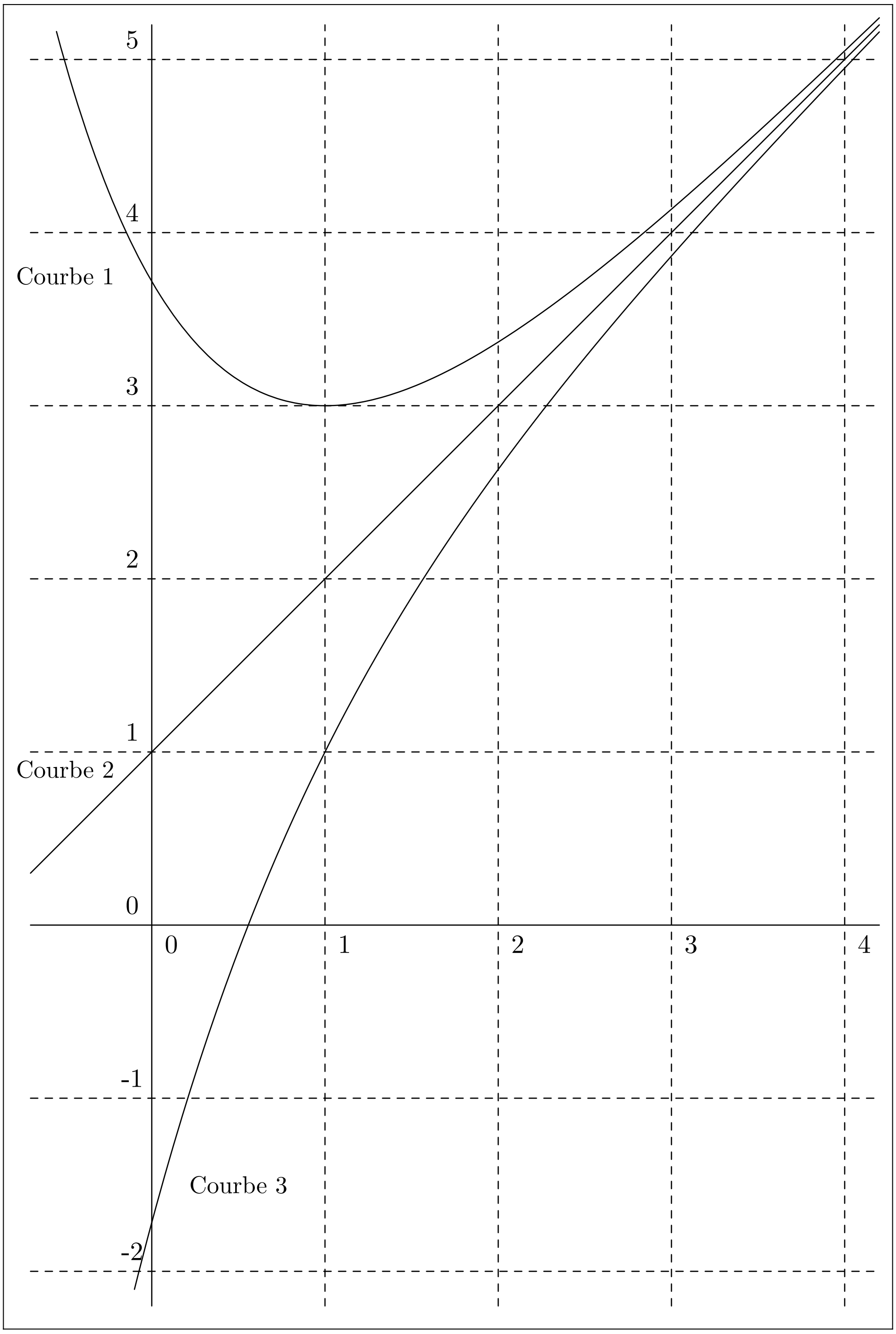
Extrait d'une feuille de calcul

Exemple d'utilisation : au croisement de la ligne 12 et de la colonne E le nombre 0,706 correspond à $P(X \leq 245,3)$.

Annexe 2

Exercice 3

À rendre avec la copie



EXERCICE 1. Géométrie

Réponses : **1. b.** **2. c.** **3. d.** **4. b.** **5. d.**

Pour analyser la figure, il est utile de déterminer les coordonnées des sommets du cube et des points I et J .

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \mathrm{B}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \mathrm{C}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \mathrm{D}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \mathrm{E}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \mathrm{F}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \mathrm{G}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \mathrm{H}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{I}\begin{pmatrix}0\\0\\1/2\end{pmatrix} \quad \mathrm{J}\begin{pmatrix}1\\1/2\\0\end{pmatrix}$$

1. les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\begin{pmatrix}1\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EC}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires : les droites (IJ) et (EC) ne peuuvent être parallèles.

Une représentation paramétrique de (IJ) est $\begin{cases} x = t \\ y = t/2 \\ z = 1/2 - t/2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Et une représentation paramétrique de (EC) est $\begin{cases} x = u \\ y = u \\ z = 1 - u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$

Le système obtenu en identifiant ces deux représentations paramétriques n'a pas de solution : en identifiant t et u , on obtient successivement $t = 0$ puis $t = 1$, ce qui est impossible.
Les deux droites n'ont aucun point commun : elles sont donc non coplanaires.

2. Coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BG}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

D'où le produit scalaire : $1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1$

3. Les coordonnées du point A ne vérifient pas la première équation : $x_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{A}} - 1 = -1 \neq 0$
Les coordonnées du point F ne vérifient pas la deuxième équation : $x_{\mathrm{F}} - y_{\mathrm{F}} + z_{\mathrm{F}} = 2 \neq 0$
Les coordonnées du point H ne vérifient pas la troisième équation : $-x_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{H}} + z_{\mathrm{H}} = 2 \neq 0$
La quatrième équation est effectivement vérifiée par les coordonnées des points A, F et H.

4. Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ étant $x + y - z = 0$, ce plan admet pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

On vérifie qu'il s'agit du vecteur $\overrightarrow{EC}$: tout vecteur colinéaire à ce vecteur est également normal au plan $\mathcal{P}$. Les points E, L et C étant alignés, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{EL}}$ convient.

5. Une représentation paramétrique de la droite (EC) est $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Le paramètre t correspondant au point L, point d'intersection de cette droite avec $\mathcal{P}$ vérifie :

$$t + t - (1 - t) = 0 \iff t = 1/3$$

D'où les coordonnées du point L : $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

On peut alors calculer les coordonnées du vecteur :

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

On en déduit $\overrightarrow{\mathrm{AL}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

EXERCICE 2. Probabilités

Partie A

Pour n suffisamment grand, on peut écrire : $P\left(p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq f \leq p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,95$

On remarque d'une part que : $p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq f \iff p \leq f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Et d'autre part que : $f \leq p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \iff f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq p$

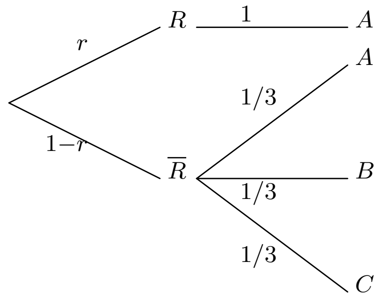
On obtient par conséquent l'équivalence suivante :

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq f \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \iff f - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq f + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Les événements que ces deux encadrements définissent ont donc la même probabilité.

Partie B

1. a. Arbre de probabilités.



b. On peut déterminer la probabilité de A en appliquant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap R) + P(A \cap \overline{R}) \\ &= P(R) + P(\overline{R})\, P_{\overline{R}}(A) \\ &= r + \frac{1}{3}(1-r) \\ &= \frac{1+2r}{3} \end{aligned}$$

c. Il s'agit ici de calculer : $P_A(R) = \dfrac{P(R \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(R)}{P(A)} = \dfrac{3r}{1+2r}$

2. a. Les hypothèses faites dans l'énoncé permettent d'affirmer que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = P(A) = \dfrac{1+2r}{3}$.

b. Dans le sondage effectué, la fréquence des réponses A est $f = \dfrac{240}{400} = 0,6$, ce qui permet d'affirmer qu'il y a plus de 95% de chances que p vérifie :

$$0,6 - \frac{1}{\sqrt{400}} \leq p \leq 0,6 + \frac{1}{\sqrt{400}} \iff 0,55 \leq p \leq 0,65$$

Il y a donc plus de 95% de chances que r vérifie :

$$0,55 \leq \frac{1+2r}{3} \leq 0,65 \iff 0,325 \leq r \leq 0,475$$

c. Pour $r = 0,4$, on calcule $p = 0,6$: la moyenne de la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,6$ est $\mu = 240$ et son écart-type est $\sigma = \sqrt{96}$.
On peut approcher X par la loi normale de moyenne $\mu = 240$ et de variance $\sigma^2 = 96$
En utilisant la table de l'annexe, on obtient $P(X \leq 250) \approx 0,85$.

EXERCICE 3. Fonctions

Partie A

1. Le cours donne $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$; on en déduit par produit : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

Pour lever l'indétermination en $-\infty$, on développe : $f(x) = x\,e^x + e^x$
Les théorèmes sur la croissance comparée entraînent $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$ et on sait, d'après le cours, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. On en déduit par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$

2. On pose $u(x) = x + 1$ et $v(x) = e^x$ de sorte que $f(x) = u(x)\,v(x)$.
Par application de la formule de dérivation d'un produit de fonctions :

$$f'(x) = 1\,e^x + (x+1)\,e^x = \boxed{(x+2)\,e^x}$$

3. La fonction exponentielle est strictement positive. Par conséquent, $f'(x)$ est toujours du signe de $(x+2)$ et nous pouvons dresser le tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. a. On remarque d'abord $g_m(x) = 0 \iff x + 1 = me^{-x}$
En multipliant chaque membre par $e^x \neq 0$, on obtient l'équation équivalente :

$$(x+1)\,e^x = m \iff f(x) = m$$

b. Le tableau suivant donne selon les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ et donc le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses :

$m < -e^{-2}$	aucune solution
$m = -e^{-2}$	1 solution
$-e^{-2} < m < 0$	2 solutions
$0 \leq m$	1 solution

2. Il est immédiat de vérifier $-e \approx -2,7$ et $-e^{-2} \approx -0,14$: puisque $-e < -e^{-2}$, la courbe $\mathcal{C}_{-e}$ n'a aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses ; il s'agit donc de la courbe n°1.
La courbe $\mathcal{C}_0$ a pour équation $y = x + 1$: il s'agit d'une droite ; $\mathcal{C}_0$ est donc la courbe n°2.
Il reste alors la courbe n°3 pour $\mathcal{C}_e$.

3. La position de $\mathcal{C}_m$ par rapport à $\mathcal{D} = \mathcal{C}_0$ dépend du signe de la différence :

$$g_m(x) - (x+1) = -me^{-x}$$

L'exponentielle étant strictement positive, cette différence est du signe de $-m$:

- si $m < 0$, alors $\mathcal{C}_m$ est au-dessus de $\mathcal{D}$
- si $m > 0$, alors $\mathcal{C}_m$ est en-dessous de $\mathcal{D}$

4. a. Voir la figure

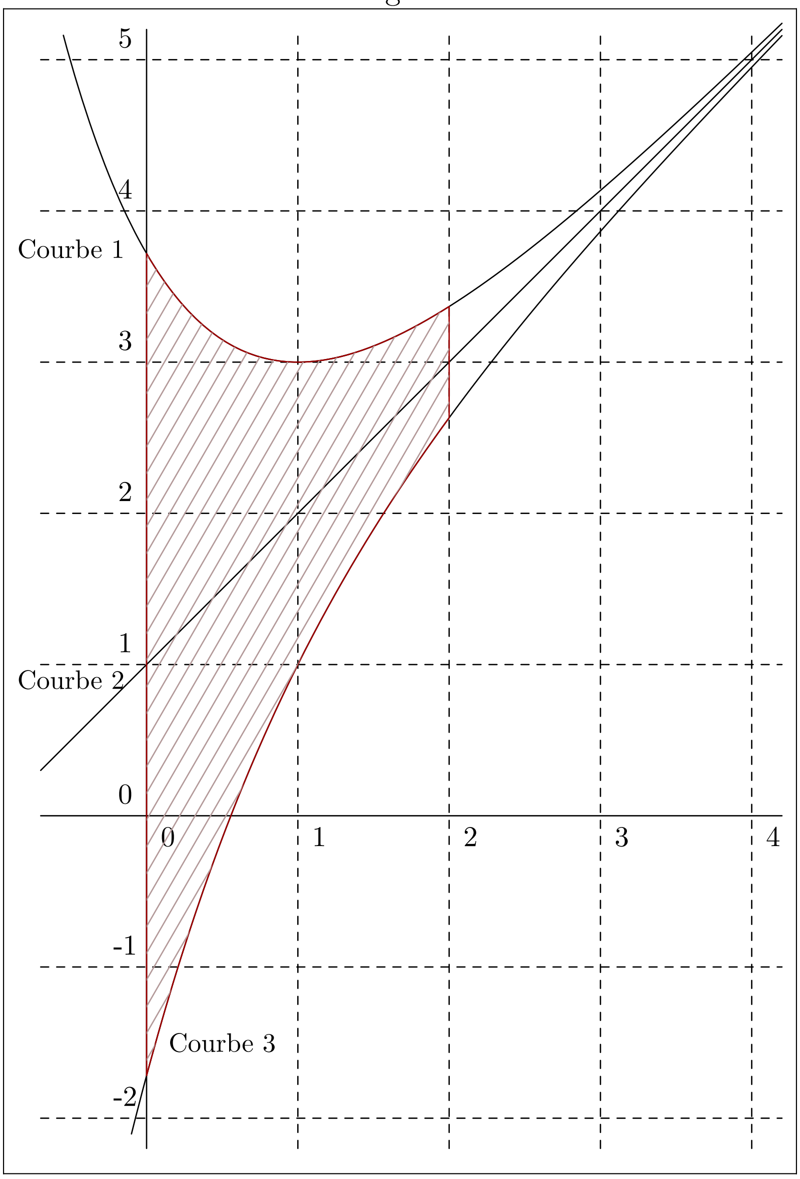
b. On a démontré que $\mathcal{C}_{-e}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_e$. L'aire entre ces deux courbes est alors :

$$\mathcal{A}(a) = \int_0^a \left[g_{-e}(x) - g_e(x)\right]\,dx = \int_0^a 2e\,e^{-x}\,dx = 2e[-e^{-x}]_0^a = \boxed{2e\left(1 - e^{-a}\right)}$$

Sachant $\lim\limits_{a\to+\infty} 1 - a = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, il vient $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-a} = 0$

On en déduit avec les théorèmes sur les opérations $\boxed{\lim\limits_{a\to+\infty} \mathcal{A}(a) = 2e}$

Figure



Représentation du domaine D_2

EXERCICE 4. Complexes

Partie A

1. De $z_0 = 1 + i$, on déduit $a_0 = b_0 = 1$.

2. On vérifie d'abord $|z_0| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
On a donc $z_1 = \dfrac{1 + i + \sqrt{2}}{3}$ dont on déduit $\boxed{a_1 = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{3}}$ et $\boxed{b_1 = \dfrac{1}{3}}$.

3. a. Exécution de l'algorithme pour $N = 2$.

K	A	B
1	0,8047	0,3333
2	0,5586	0,1111

b. L'algorithme affiche le terme de la suite (a_n) qui a pour rang N.

Partie B

1. On a d'abord $|z_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, ce qui implique :

$$z_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} + ib_n}{3}$$

Par identification des parties réelles : $\boxed{a_{n+1} = \dfrac{a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{3}}$

Par identification des parties imaginaires : $\boxed{b_{n+1} = \dfrac{b_n}{3}}$

2. La suite (b_n) est géométrique de premier terme $b_0 = 1$ et de raison $\dfrac{1}{3}$.
Par application du cours, $b_n = b_0 \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{3^n}$
Sachant $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, on a : $\lim \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ et donc $\boxed{\lim b_n = 0}$

3. a. Par application de l'inégalité triangulaire : $|z_n + |z_n|| \leq |z_n| + ||z_n||$
On sait que $|z_n|$ est un réel positif ; il est donc égal à son propre module :

$$||z_n|| = |z_n|$$

D'où l'inégalité

$$|z_{n+1}| = \frac{|z_n + |z_n||}{3} \leq \frac{2\,|z_n|}{3}$$

b. On procède par récurrence :

- pour $n = 0$, $u_0 = |1 + i| = \sqrt{2}$ et $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0 \sqrt{2} = \sqrt{2}$: l'inégalité est vérifiée
- supposons le résultat vérifié pour un certain entier n : $u_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$

  en multipliant chaque membre par $\dfrac{2}{3}$, il vient : $\dfrac{2}{3}u_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2}$

nous avons démontré à la question précédente $u_{n+1} \leq \dfrac{2}{3} u_n$; nous obtenons :

$$u_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \sqrt{2}$$

la propriété est donc héréditaire

- on peut conclure que pour tout entier n, $u_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$

c. Par définition, $u_n = |z_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Nous pouvons alors écrire :

$$u_n \geq \sqrt{a_n^2} = |a_n|$$

Par conséquent, on peut donc encadrer pour tout entier naturel n, le terme $|a_n|$ de la façon suivante :

$$0 \leq |a_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$$

Or $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$ implique $\lim \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.

Alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim |a_n| = 0$

On en déduit pour conclure $\boxed{\lim a_n = 0}$.