p.40 n° 99

1. La suite (v_n) est définie par récurrence :

$$v_0 = -\frac{3}{2} \quad \text{et pour tout } n,\ v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n - 1$$

Lest termes de (w_n) se calculent ensuite à partir de ceux de (v_n)

2. On calcule w_{n+1} en fonction de v_{n+1} :

$$w_{n+1} = 2v_{n+1} + 6$$

On remplace v_{n+1} par son expression en fonction de v_n : $w_{n+1} = 2\left(\frac{2}{3}v_n - 1\right) + 6 = \frac{4}{3}v_n + 4$

On calcule v_n en fonction de w_n : $v_n = \frac{w_n - 6}{2} = \frac{w_n}{2} - 3$

On remplace maintenant v_n par cette expression :

$$w_{n+1} = \frac{4}{3}\left(\frac{w_n}{2} - 3\right) + 4 = \frac{2}{3}\,w_n - 4 + 4 = \boxed{\frac{2}{3}\,w_n}$$

La suite (w_n) est donc **géométrique** de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $w_0 = 2v_0 + 6 = 3$

3. Par application du cours : $w_n = w_0\,q^n = \boxed{3\,\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

On a précédemment calculé v_n en fonction de w_n :

$$v_n = \frac{w_n}{2} - 3 = \frac{3}{2}\,\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 = \boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3}$$

On sait que si $-1 < q < 1$, alors $\lim q^n = 0$. On en déduit (par somme) $\boxed{\lim v_n = -3}$.

4. On calcule ici la somme de $n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique.

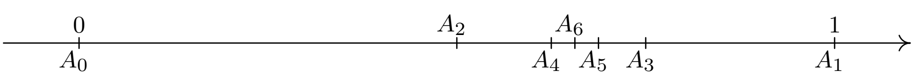
Le premier terme est $w_0 = 3$, la raison est $q = \frac{2}{3}$ et le nombre de termes est $n+1$:

$$S_n = w_0\,\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 3\,\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 9\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

Comme dans la question précédente : $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0 \Longrightarrow \boxed{\lim S_n = 9}$

p.41 n° 102

1. a) <u>Figure</u>



b) Calcul des premiers termes :

n	0	1	2	3	4	5	6
a_n	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{21}{32}$

c) On sait que si M est la milieu du segment $[AB]$, alors : $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$

2. On procède par récurrence sur n

- pour n = 0, on vérifie :

$$a_{n+1} = a_1 = 1 \text{ et } -\frac{1}{2}\,a_n + 1 = -\frac{1}{2} \times 0 + 1 = 1$$

l'égalité est prouvée

- supposons que pour un certain entier n, on ait vérifié le résultat
  on a donc : $a_{n+1} = -\frac{1}{2}\,a_n + 1$
  on peut écrire de façon équivalente : $a_n = 2(1 - a_{n+1})$
  on en déduit :
  $$a_{n+2} = \frac{a_n}{2} + \frac{a_{n+1}}{2} = 1 - a_{n+1} + \frac{a_{n+1}}{2} = 1 - \frac{a_{n+1}}{2}$$
  la propriété est par conséquent héréditaire
- conclusion : pour tout n, $a_{n+1} = -\frac{1}{2}\,a_n + 1$

3. On calcule v_{n+1} successivement en fonction de a_{n+1}, puis de a_n puis de v_n en remarquant au préalable que
$$v_n = a_n - \frac{2}{3} \iff a_n = v_n + \frac{2}{3}$$
On a dans ce cas :
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{2}\,a_n + 1 - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{1}{2}\,a_n + \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{2}\left(v_n + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{2}\,v_n \end{aligned}$$
La suite (v_n) est donc **géométrique** de premier terme $v_0 = -\frac{2}{3}$ et de raison $q = -\frac{1}{2}$

4. Par application du cours :
$$v_n = v_0\,q^n = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
On sait que si $-1 < q < 1$, alors $\lim q^n = 0$. On en déduit $\lim v_n = 0$.
On a précédemment calculé a_n en fonction de v_n : $v_n = v_n + \frac{2}{3}$
On peut alors conclure $\boxed{\lim a_n = \frac{2}{3}}$