EXERCICE 1. [6 pts] Lois continues

Un industriel fabrique des vannes électroniques destinées à des circuits hydrauliques.

Les quatre parties A, B, C, D sont indépendantes.

Partie A

La durée de vie d'une vanne, exprimée en heures, est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0002$.

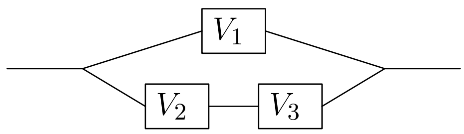
1. Quelle est la durée de vie moyenne d'une vanne ?

2. Calculer la probabilité, à 0,001 près, que la durée de vie d'une vanne soit supérieure à 6000 heures.

Partie B

Avec trois vannes identiques V_1, V_2, V_3, on fabrique le circuit hydraulique ci-contre.

Le circuit est en état de marche si V_1, est en état de marche ou si V_2 et V_3 le sont simultanément.



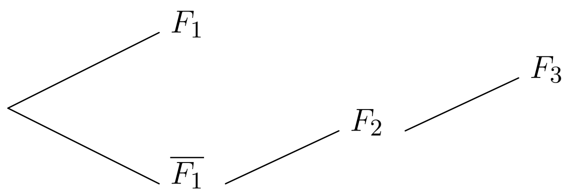
On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche aprè 6000 heures. On note :

- F_1 l'événement « la vanne V_1 est en état de marche après 6000 heures »
- F_2 l'événement « la vanne V_2 est en état de marche après 6000 heures »
- F_3 l'événement « la vanne V_3 est en état de marche après 6000 heures »
- E l'événement « le circuit est en état de marche après 6000 heures »

On admet que les événements F_1, F_2 et F_3 sont indépendants et ont chacun une probabilité égale à 0,3.

1.

L'arbre probabiliste ci-contre représente une partie de la situation.
Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.



2. Démontrer que $P(E) = 0,363$.

3. Sachant que le circuit est en état de marche après 6000 heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment-là. Arrondir au millième.

Partie C

L'industriel affirme que seulement 2% des vannes qu'il fabrique sont défectueuses. On suppose que cette affirmation est vraie et l'on note F la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon de 400 vannes prises dans la population totale.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la variable F

2. On choisit 400 vannes dans la production. On assimile ce choix à un tirage aléatoire de 400 vannes, avec remise, dans la production.
Parmi ces 400 vannes, 10 sont défectueuses.
Au vu de ce résultat, peut-on remettre en cause, au seuil de 95%, l'affirmation de l'industriel ?

Partie D

Dans cette partie, les probabilités calculées seront arrondies au millième.

L'industriel commercialise ses vannes auprès de nombreux clients. La demande mensuelle est une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $m = 800$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Déterminer $P(760 \leq D \leq 840)$.

2. Déterminer $P(D \leq 880)$.

3. L'industriel pense que s'il constitue un stock mensuel de 880 vannes, il n'aura pas plus de 1% de chance d'être en rupture de stock. A-t-il raison ?

EXERCICE 2. [4 pts] **Géométrie**

Les quatre questions sont indépendantes.
Pour chaque question une réponse est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé,on considère :
- les points A(12 , 0 , 0) B(0 , -15 , 0) C(0 , 0 , 20) D(2 , 7 , -6) E(7 , 3 , -3)
- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $2x + y - 2z - 5 = 0$

Affirmation 1

Une équation cartésienne du plan parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par le point A est : $2x+y+2z-24 = 0$.

Affirmation 2

Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\begin{cases} x = 9 - 3t \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Affirmation 3

La droite (DE) et le plan $\mathcal{P}$ ont au moins un point en commun.

Affirmation 4

La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

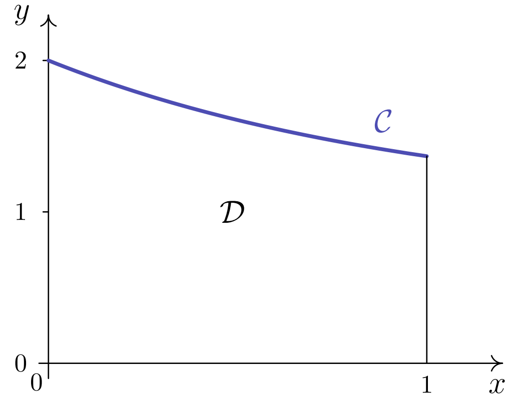
EXERCICE 3. [5 pts] Fonctions

On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par : $g(x) = 1 + e^{-x}$.
On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $g(x) \geq 0$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal, et $\mathcal{D}$ le domaine plan compris

> d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$,
> d'autre part entre les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

La courbe $\mathcal{C}$ et le domaine $\mathcal{D}$ sont représentés ci-contre.



Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

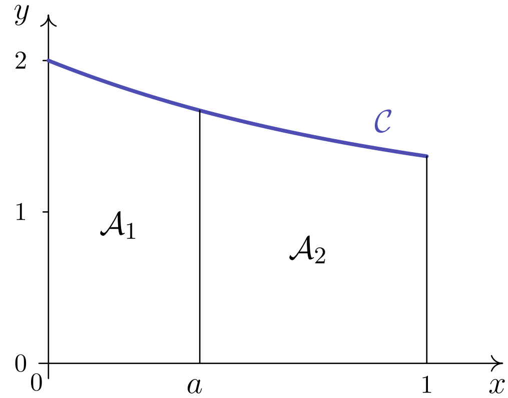
Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leq a \leq 1$.

On note $\mathcal{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe (Ox), les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$,

puis $\mathcal{A}_2$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe (Ox), les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.

$\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont exprimées en unité d'aire.



1. **a.** Démontrer que $\mathcal{A}_1 = a - e^{-a} + 1$.
b. Exprimer $\mathcal{A}_2$ en fonction de a.

2. Soit f la fonction définie pour tout x réel de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par : $f(x) = 2x - 2e^{-x} + \dfrac{1}{e}$.

a. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et de $f(1)$.

b. Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule en un réel α. Donner la valeur de α arrondie au centième.

3. En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales.

Partie B

Soit b un réel positif.
Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathcal{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel positif b solution.

1. Justifier l'inégalité $b < 1 + \dfrac{1}{e}$. On pourra utiliser un argument graphique.

2. Déterminer la valeur exacte du réel b .

EXERCICE 4. [5 pts] **Suites**

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence = $u_{n+1} = \dfrac{n\,u_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.

Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur .... Affecter à n la valeur .... Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.

2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?

3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	...	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	...	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = n\,u_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_n = \dfrac{1 + (0,5)^n}{n}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Justifier que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie **A**, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

EXERCICE 1. Lois continues

Partie A

La durée de vie d'une vanne, exprimée en heures, est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,000\,2$.

1. L'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$.

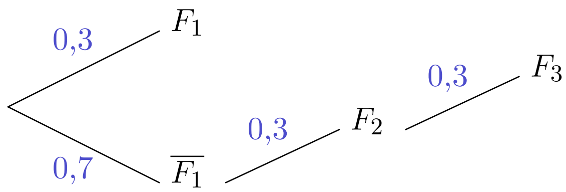
La durée de vie moyenne d'une vanne est donc $\dfrac{1}{0,000\,2} = \boxed{5\,000}$ heures.

2. D'après le cours : $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$. La probabilité que la durée de vie d'une vanne soit supérieure à 6000 heures est donc

$$e^{-0,000\,2\times 6\,000} = e^{-1,2} \approx \boxed{0,301}$$

Partie B

1. L'énoncé donne $P(F_1) = 0,3$ dont on déduit $P(\overline{F_1} = 0,7$.
Les autres probabilités à reporter sont $P(F_2) = P(F_3) = 0,3$ car les événements sont indépendants : les probabilités conditionnelles sont égales aux probabilités sans conditions.



2. D'après le texte, E est la réunion disjointe de F_1 et de $\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3$. On obtient respectivement

$P(F_1) = 0,3$

$P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3) = 0,7 \times 0,3 \times 0,3 = 0,063$

On en déduit le résultat : $P(E) = 0,3 + 0,063 = \boxed{0,363}$

3. Il s'agit ici de calculer :

$$P_E(V_1) = \frac{P(E \cap V_1)}{P(E)} = \frac{P(V_1)}{P(E)} = \frac{0,3}{0,363} \approx \boxed{0,826}$$

Partie C

1. On suppose que la proportion de vannes défectueuses est connue et égale à $p = 0,02$.
Pour un échantillon de $n = 400$ vannes prélevées dans la production, les hypothèses $n \geq 30$, $np = 8 \geq 5$ et $n(1-p) = 392 \geq 5$ sont vérifiées.
Le cours donne l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% avec les bornes suivantes :

$$p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,03372 \quad \text{et} \quad p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,00628$$

2. La fréquence des vannes défectueuses dans l'échantillon est $f = \dfrac{10}{400} = 0,025$
Cette fréquence est dans l'intervalle de fluctuation déterminé à la question précédente : il n'y a pas de raison de remettre en cause, au seuil de 95%, l'affirmation de l'industriel .

Partie D

1. On demande $P(760 \leq D \leq 840) = P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma)$: le résultat est directement donné par le cours :

$$P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) \approx 0,68$$

Le résultat est confirmé par la calculatrice.

2. On demande $P(D \leq 880) = P(D \leq m + 2\sigma)$.
Le cours donne $P(m - 2\sigma \leq D \leq m + 2\sigma) = 0,95$. On en déduit $P(m \leq X \leq m + \sigma) = 0,475$ puis

$$P(D \leq m + 2\sigma) = 0,5 + 0,475 = 0,975$$

De nouveau la calculatrice confirme le résultat.

3. Il y a environ 2,5% de chance que la demande dépasse 880 vannes : la prévision faite par l'industriel est donc erronée.

EXERCICE 2. Géométrie

Affirmation 1 : FAUX
On vérifie :
- un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{n}(2\,,1\,,-2)$
- un vecteur normal au plan d'équation $2x+y+2z-24=0$ est $\overrightarrow{n'}(2\,,1\,,2)$.

Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, les deux plans ne peuvent être parallèles.

Affirmation 2 : VRAI
Notons provisoirement d la droite qui admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 9-3t \\ y = 0 \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z = 5+5t \end{cases}$$

Pour $t=-1$, le point de (d) a pour coordonnées (12 , 0 , 0) : c'est le point A
Pour $t=3$, le point de (d) a pour coordonnées (0 , 0 , 20) : c'est le point C
Or par deux points de l'espace passe une droite et une seule : on en déduit $d=(\text{AC})$

Affirmation 3 : FAUX
Un vecteur directeur de la droite (DE) est $\overrightarrow{\text{DE}}(5\,,-4\,,3)$ et un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{n}(2\,,1\,,-2)$. Ces deux verteurs sont orthogonaux :

$$\overrightarrow{\text{DE}}\cdot\overrightarrow{n} = 5\times 2-4\times 1+3\times -2 = 0$$

La droite (DE) est donc parallèle au plan $\mathcal{P}$. Si la droite (DE) avait un point en commun avec le plan $\mathcal{P}$, elle serait contenue dans ce plan. Or on remarque, par exemple, que les coordonnées du point D ne vérifient pas l'équation du plan $\mathcal{P}$:

$$2x_D+y_D-2z_D-5 = 2\times 2+7-2\times -6-5 = 18\neq 0$$

Affirmation 4 : VRAI
On calcule les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{\text{AB}}(-12\,,-15\,,0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{AC}}(-12\,,0\,,20)$$

On calcule ensuite les produits scalaires :

$$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{DE}} = -12\times 5+-15\times -4+0\times 3 = -60+60 = 0$$
$$\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{DE}} = -12\times 5+0\times -4+20\times 3 = -60+60 = 0$$

La droite (DE) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) : elle est orthogonale à ce plan.

EXERCICE 3. Fonctions

Partie A

1. a. Puisque la fonction g est positive, l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ entre 0 et a est :

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^a g(x)\,dx$$

Or une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $G(x) = x - e^{-x}$.

Donc : $\mathcal{A}_1 = G(a) - G(0) = \boxed{a - e^{-a} + 1}$.

b. On utilise la même primitive pour calculer l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ entre a et 1 :

$$\mathcal{A}_2 = \int_a^1 g(x)\,dx = G(1) - G(a) = \boxed{1 - e^{-1} - a + e^{-a}}$$

2. a. La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ 1]$ et pour tout réel x dans cet intervalle :

$$f'(x) = 2 + 2e^{-x} = 2g(x)$$

Cette dérivée est strictement positive puisque l'exponentielle est toujours strictement positive. Sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, la fonction f est donc strictement croissante :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\dfrac{1}{e} - 2$	$\nearrow$	$1 - \dfrac{2}{e}$

On vérifie $f(0) = -2e^0 + \dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{e} - 2$ et $f(1) = 2 - 2e^{-1} + \dfrac{1}{e} = 2 - \dfrac{1}{e}$.

b. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$: l'intervalle image est alors $\left[\dfrac{1}{e} - 2\ ;1 - \dfrac{2}{e}\right]$. Cet intervalle image contient 0 puisque ses bornes sont opposées : la fonction f s'annule donc une fois et une seule sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

Encadrement de α, solution de $f(x) = 0$:

$$f(0,4) \approx -0,17 < 0 \quad \text{et} \quad f(0,5) \approx 0,15 > 0 \quad \Longrightarrow \quad 0,4 < \alpha < 0,5$$
$$f(0,45) \approx -0,007 < 0 \quad \text{et} \quad f(0,46) \approx 0,025 > 0 \quad \Longrightarrow \quad 0,45 < \alpha < 0,46$$

Au centième, on peut arrondir α à 0,45 .

3. En utilisant les résultats de **A. 1.** on peut écrire que les deux aires sont égales lorsque :

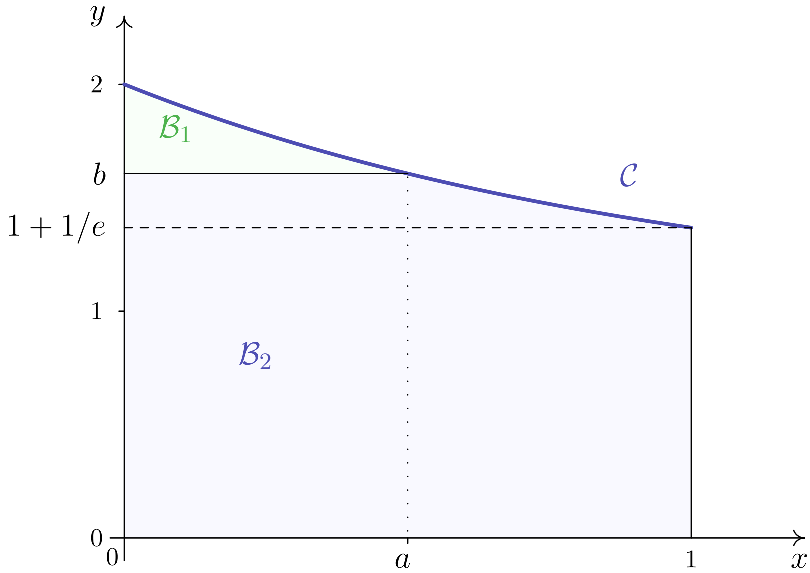
$$a - e^{-a} + 1 = 1 - e^{-1} - a + e^{-a} \iff 2a - 2e^{-a} + \frac{1}{e} = 0$$
$$\iff f(a) = 0$$

Or cette équation a été résolue en **A. 2.** et on peut conclure que les deux aires sont égales lorsque le réel a est approximativement égal à 0,45 .

Partie B

1. On peut remarquer au préalable que l'aire totale du domaine $\mathcal{D}$ est $\mathcal{A} = 2 - \dfrac{1}{e}$
D'autre part, on notera d la droite d'équation $y = b$ et on supposera $0 \leq b \leq 2$, car dans le cas contraire, la droite d ne coupe pas le domaine $\mathcal{D}$.
Sous cette hypothèse, la droite d d'équation $y = b$ partage $\mathcal{D}$ en deux domaines :
- l'un est situé au-dessus de la droite d et a pour aire $\mathcal{B}_1$
- l'autre est situé en-dessous de la droite d et a pour aire $\mathcal{B}_2$

On veut donc trouver un réel b tel que $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \dfrac{\mathcal{A}}{2} = 1 - \dfrac{1}{2e}$
Dans le cas où $b \geq f(1) = 1 + \dfrac{1}{e}$, la droite d'équation $y = b$ coupe la courbe $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a.



Le domaine situé au-dessus de d est contenu dans le domaine délimité par la courbe, la droite d'équation $y = 1 + \dfrac{1}{e}$ et les deux droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
On peut majorer son aire :

$$\mathcal{B}_1 \leq \int_0^1 [f(x) - f(1)]\, dx = \mathcal{A} - 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}$$

On vérifie que ce majorant est plus petit que $\dfrac{\mathcal{A}}{2}$:

$$1 - \frac{2}{e} \approx 0,264 \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{2e} \approx 0,349$$

Il n'est pas possible d'avoir dans cette situation $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.
Par conséquent, on a nécessairement $b < 1 + \dfrac{1}{e}$

2. Dans le cas où $b < 1 + \dfrac{1}{e}$, l'aire du domaine situé en dessous de d est :

$$\mathcal{B}_2 = 1 \times b = b$$

La condition à vérifier est donc $b = \dfrac{\mathcal{A}}{2} \iff \boxed{b = 1 - \dfrac{1}{2e}}$.

EXERCICE 4. Suites

Partie A - Algorithmique et conjectures

1. Les deux lignes complétées sont :
Affecter à u la valeur $(n \times u + 1)/(2 \times (n + 1))$
Affecter à n la valeur $n + 1$

2. Pour afficher les termes successifs de la suite, l'instruction d'affichage doit être placée **à l'intérieur** de la boucle `Tant que` au lieu d'être placée en sortie :

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur $(n \times u + 1)/(2 \times (n + 1))$ Affecter à n la valeur $n + 1$ Afficher la variable u Fin Tant que
Sortie	

3. La suite (u_n) semble être décroissante et convergente vers 0.

Partie B - Étude mathématique

1. Calcul de v_{n+1} en fonction de u_{n+1}, puis en fonction de u_n et finalement en fonction de v_n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (n+1)\,u_{n+1} - 1 \\ &= (n+1)\,\frac{n\,u_n + 1}{2(n+1)} - 1 \\ &= \frac{n\,u_n - 1}{2} \\ &= \boxed{\frac{v_n}{2}} \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - 1 = \dfrac{1}{2}$.

2. Par application du cours, pour tout $n \geq 1$:

$$v_n = v_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = (0,5)^n$$

Nous savons que pour tout $n \geq 1$: $v_n = n\,u_n - 1$
Nous pouvons donc calculer u_n :

$$u_n = \frac{1 + v_n}{n} = \boxed{\frac{1 + (0,5)^n}{n}}$$

3. De $-1 < 0,5 < 1$ nous pouvons déduire $\lim (0,5)^n = 0$.

On obtient alors par somme puis inverse : $\boxed{\lim u_n = 0}$

4. Calcul de la différence entre deux termes consécutifs de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \frac{1+(0,5)^{n+1}}{n+1}-\frac{1+(0,5)^n}{n}\\
&= \frac{n(0,5)^{n+1}-(n+1)(0,5)^n-1}{n(n+1)}\\
&= -\frac{1+(n+1)(0,5)^n-n(0,5)^{n+1}}{n(n+1)}\\
&= -\frac{1+\left[(n+1)-n\times 0,5\right](0,5)^n}{n(n+1)}\\
&= -\frac{1+(1+0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

Puisque n est un entier naturel non nul, le numérateur et le dénominateur du quotient précédent sont strictement positifs. Donc la différence $u_{n+1}-u_n$ est négative et la suite (u_n) est décroissante.

Partie C - Retour à l'algorithmique

La condition doit porter sur le terme de la suite qui vient d'être calculé. L'affichage doit être réalisé en sortie et doit être celui du rang pour lequel on est sorti de la boucle `Tant que` :

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $u \geq 0,001$ Affecter à u la valeur $(n\times u+1)/(2\times(n+1))$ Affecter à n la valeur $n+1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable n