EXERCICE 1. [6 pts] Fonctions

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étude de la fonction f.

a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec les axes du repère.

b. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$

c. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.

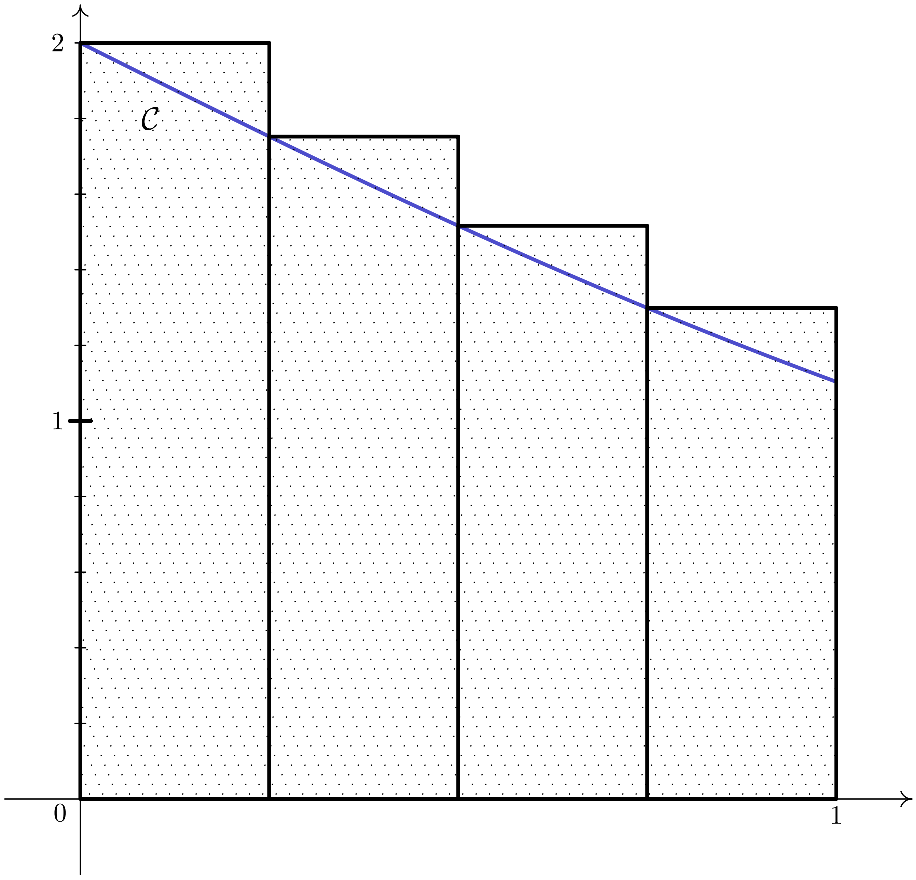
On note $\mathcal{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

On approche l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en calculant une somme d'aires de rectangles.

a. Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0\,;1]$ en quatre intervalles de même longueur :

- sur l'intervalle $\left[0\,,\dfrac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
- sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4}\,,\dfrac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$
- sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$
- sur l'intervalle $\left[\dfrac{3}{4}\,,1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-dessous.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Variables :	k est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à 3
	Affecter à S la valeur $S + \dfrac{1}{4} f\left(\dfrac{k}{4}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

b. Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1.
On découpe l'intervalle $[0\,,1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question **2. a.**
Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des N rectangles ainsi construits.

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x-3)e^{-x}$.
On admet que la fonction g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$

a. Calculer l'aire exacte $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ exprimée en unités d'aire.

b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} de l'erreur commise en remplaçant $\mathcal{A}$ par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme à la question **2. a.**, c'est-à-dire l'écart entre les deux valeurs.

EXERCICE 2. [4 pts] QCM

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. Soit $z_1 = \sqrt{6}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $i\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

a. $\sqrt{3}\,e^{i\frac{19\pi}{12}}$ **b.** $\sqrt{12}\,e^{-i\frac{\pi}{12}}$ **c.** $\sqrt{3}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$ **d.** $\sqrt{3}\,e^{i\frac{13\pi}{12}}$

2. L'équation $-z = \overline{z}$, d'inconnue complexe z, admet :
- **a.** une solution
- **b.** deux solutions
- **c.** une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite
- **d.** une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle

3. Dans un repère de l'espace, on considère les trois points $A(1\,,2\,,3)$, $B(-1\,,5\,,4)$ et $C(-1\,,0\,,4)$. La droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C a pour représentation paramétrique :

a. $\begin{cases} x = -2t-1 \\ y = 3t \\ z = t+4 \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$ **c.** $\begin{cases} x = -1-2t \\ y = 5+3t \\ z = 4+t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

b. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7t \\ z = 7t+4 \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$ **d.** $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère

le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $D(-1\,,2\,,3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3\,,-5\,,1)$

et la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t-7 \\ y = t+3 \\ z = 2t+5 \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

- **a.** La droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
- **b.** La droite Δ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ et n'a pas de point commun avec le plan $\mathcal{P}$.
- **c.** La droite Δ et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.
- **d.** La droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

EXERCICE 3. [5 pts] Probabilités

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante

Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux. L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :

30% de musique classique, 45% de variété, le reste étant du jazz.

Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage haute qualité et un encodage standard. On sait que :

- Les $\frac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- Les $\frac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considèrera les événements suivants :

C : « *Le morceau écouté est un morceau de musique classique* »
V : « *Le morceau écouté est un morceau de variété* »
J : « *Le morceau écouté est un morceau de jazz* »
H : « *Le morceau écouté est encodé en haute qualité* »
S : « *Le morceau écouté est encodé en qualité standard* »

Partie 1

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ».
On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

1. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?

2. On sait que $P(H) = \frac{13}{20}$.

a. Les événements C et H sont-ils indépendants ?

b. Calculer $P(J \cap H)$ et $P_J(H)$.

Partie 2

Pendant un long trajet en train, Thomas écoute, en utilisant la fonction « lecture aléatoire » de son MP3, 60 morceaux de musique.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de morceaux de musique classique dans un échantillon de taille 60.

2. Thomas a comptabilisé qu'il avait écouté 12 morceaux de musique classique pendant son voyage. Peut-on penser que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas est défectueuse ?

Partie 3

On considère la variable aléatoire X qui, à chaque chanson stockée sur le lecteur MP3, associe sa durée exprimée en secondes et on établit que X suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 20.

On pourra utiliser le tableau fourni en annexe dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

On écoute un morceau musical au hasard.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(180 \leq X \leq 220)$.

2. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité que le morceau écouté dure plus de 4 minutes.

EXERCICE 4. [5 pts] Suites

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. a. Calculer u_1 et u_2.

b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3

b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

ANNEXE de l'exercice 3

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 20.

b	$P(X \leq b)$
140	0,001
150	0,006
160	0,023
170	0,067
180	0,159
190	0,309
200	0,500
210	0,691
220	0,841
230	0,933
240	0,977
250	0,994
260	0,999

EXERCICE 1. Fonctions

1. a. Intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses
On résout : $f(x) = 0 \iff (x+2)e^{-x} = 0$
Puisque l'exponentielle est strictement positive, cette équation a une solution $x = -2$ et la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un point de coordonnées $(-2\,;0)$

Intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées
On calcule $f(0) = 2e^0 = 2$.
La courbe $\mathcal{C}$ coupe donc l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;2)$

b. En $-\infty$, le cours donne $\lim\limits_{x\to-\infty} x+2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$
On en déduit, par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

En $+\infty$, la forme est indéterminée. On développe :
$$f(x) = x\,e^{-x} + 2\,e^{-x} = \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$$
D'après les résultats sur la croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$
D'après le cours : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$
On en déduit par produit puis par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$, ce qui implique que l'axe des abscisses est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

c. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel :
$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2) \times -e^{-x} = (-x-1)e^{-x}$$
Puisque l'exponentielle est strictement positive, cette dérivée est du signe de $-x-1$:
$$\begin{cases} -x-1 < 0 & \iff & x > -1 \\ -x-1 = 0 & \iff & x = -1 \\ -x-1 > 0 & \iff & x < -1 \end{cases}$$
On peut donc dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

2. a. L'aire $\mathcal{A}$ est approximativement la somme des aires des 4 rectangles :
$$\mathcal{A} = \frac{f(0) + f(0,25) + f(0,5) + f(0,75)}{4} \approx 1,642$$

b. L'algorithme modifié additionne les aires de N rectangles :
- la base de chaque rectangle est un segment d'amplitude $\frac{1}{N}$
- la hauteur de chaque rectangle est l'image par f de la plus petite borne de l'intervalle

Variables :	k est un nombre entier
	S est un nombre réel
	N est un nombre entier
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
	Lire N
Traitement :	Pour k variant de 0 à $N-1$
	Affecter à S la valeur $S + \dfrac{1}{N} f\left(\dfrac{k}{N}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

3. a. Puisque f est positive sur $[0\,,1]$, l'aire sous la courbe est

$$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)dx = \left[(-x-3)e^{-x}\right]_0^1 = -4\,e^{-1} + 3\,e^0 = \boxed{3 - \frac{4}{e}}$$

b. L'erreur faite en remplaçant la valeur exacte par la valeur approchée trouvée précédemment est alors :

$$e = 1,642 - 3 + \frac{4}{e} \approx 0,114$$

EXERCICE 2. QCM

Réponses : **1. d.** **2. c.** **3. a.** **4. b.**

1. Réponse **d.**
Calcul du module : $\left|i\,\dfrac{z_1}{z_2}\right| = |i|\,\dfrac{|z_1|}{|z_2|} = 1 \times \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$
Calcul d'un argument : $\arg\left(i\,\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(i) + \arg(z_1) - \arg(z_2) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{13\pi}{12}$

2. Réponse **c.**
Si on pose $z = x + iy$ où x et $y \in \mathbb{R}$, l'équation est équivalente à :
$$-(x+iy) = x - iy \iff -x - iy = x - iy \iff 2x = 0 \iff x = 0$$
L'équation a donc une infinité de solutions, les nombres complexes imaginaires purs : les points images de ces solutions sont les points de l'axe des ordonnées.

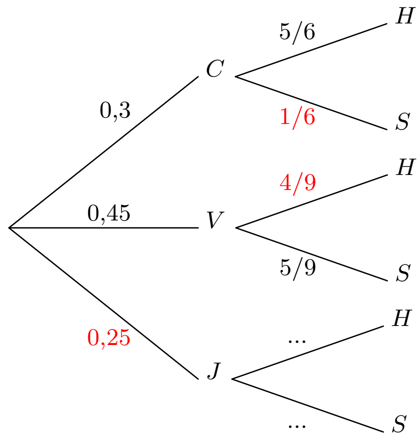
3. Réponse **a.**
Appelons (d_1) , (d_2) , (d_3) et (d_4) les droites proposées et notons $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$ et $\overrightarrow{u_4}$ un vecteur directeur respectif de chacune de ces droites.
La droite (AB) admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(-2\,;3\,;1)$
Par lecture de l'énoncé, on vérifie $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u_4} = -\overrightarrow{AB}$
Les droites (d_1) , (d_3) et (d_4) sont donc parallèles à la droite (AB).
Par contre le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ a pour coordonnées $(0\,;7\,;7)$: il n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la droite (d_2) n'est pas parallèle à la droite (AB).
Pour montrer que le point C appartient à (d_1), on résout le système :
$$\begin{cases} -2t-1 &= -1 \\ 3t &= 0 \\ t+4 &= 4 \end{cases} \iff t = 0$$
Le point C est donc le point de (d_1) correspondant au paramètre $t = 0$.

4. Réponse **b.**
Un vecteur directeur de Δ est $\overrightarrow{u}(1\,;1\,;2)$. On vérifie que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux :
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 1 \times 3 + 1 \times -5 + 2 \times 1 = 0$$
La droite Δ est donc parallèle au plan $\mathcal{P}$. Il s'agit maintenant de savoir si Δ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$ ou si Δ est incluse dans $\mathcal{P}$. Pour cela on détermine une équation cartésienne du plan :
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\iff \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{DM} = 0 \\ &\iff 3(x+1) - 5(y-2) + 1(z-3) = 0 \\ &\iff 3x - 5y + z + 10 = 0 \end{aligned}$$
Pour un point M de Δ, on vérifie :
$$3x - 5y + z + 10 = 3(t-7) - 5(t+3) + (2t+5) + 10 = -21 \neq 0$$
Par conséquent, la droite Δ et le plan $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun.

EXERCICE 3. Probabilités

Partie 1

1. L'arbre de probabilités suivant résume les données du texte.



On a indiqué en noir les valeurs initiales de l'énoncé et en rouge les valeurs qui en ont été déduites.
On demande dans cette question :

$$P(C \cap H) = P(C)\,P_C(H) = \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

2. a. On calcule le produit $P(C) \times P(H) = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{13}{20} = \dfrac{39}{200}$

On peut alors affirmer que les événements C et H **ne sont pas indépendants** car ce produit est différent de $P(C \cap H) = \dfrac{1}{4}$.

b. L'énoncé nous donne $P_V(S) = \dfrac{5}{9}$ dont on déduit $P_V(H) = 1 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{4}{9}$
On peut alors calculer :

$$P(V \cap H) = P(V)\,P_V(H) = \frac{45}{100} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{5}$$

Par application de la formule des probabilités totales, on peut écrire :

$$P(H) = P(C \cap H) + P(V \cap H) + P(J \cap H)$$

On en déduit :

$$P(J \cap H) = P(H) - P(C \cap H) - P(V \cap H) = \frac{13}{20} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{4}{20} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

On peut alors calculer la probabilité conditionnelle :

$$P_J(H) = \frac{P(J \cap H}{P(H)} = \boxed{\frac{4}{13}}$$

Partie 2

1. On connaît la proportion $p = 0,3$ de morceaux de musique classique dans le lecteur MP3.
Pour un échantillon de $n = 60$ morceaux de musique choisis sur le lecteur, les hypothèses $n \geq 30$, $np = 18 \geq 5$ et $n(1-p) = 42 \geq 5$ sont vérifiées.
Le cours donne l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% avec les bornes suivantes :

$$p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,184 \quad \text{et} \quad p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,416$$

2. Dans l'échantillon écouté, la fréquence des morceaux de musique classique est $f = \dfrac{12}{60} = 0,2$.
Cette fréquence est dans l'intervalle déterminé dans la question précédente : au seuil de 95%, on peut estimer que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 n'est pas défectueuse.

Partie 3

1. L'événement $(X \leq 220)$ est la réunion disjointe de $(X < 180)$ et de $(180 \leq X \leq 220)$.
On peut utiliser la table donnée dans l' **Annexe** car les événements $(X < 180)$ et $(X \leq 180)$ ont la même probabilité :

$$P(180 \leq X \leq 220) = P(X \leq 220) - P(X \leq 180) \approx \boxed{0,682}$$

2. On cherche ici la probabilité de l'événement $(X > 240)$. De nouveau, la table donne le résultat car l'événement contraire est $(X \leq 240)$:

$$P(X > 240) \approx 1 - 0,977 = \boxed{0,023}$$

EXERCICE 4. Suites

1. a. Calcul des premiers termes de la suite :

$$u_1 = \frac{3 \times \frac{1}{2}}{1 + 2 \times \frac{1}{2}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

$$u_2 = \frac{3 \times \frac{3}{4}}{1 + 2 \times \frac{3}{4}} = \boxed{\frac{9}{10}}$$

b. Démonstration par récurrence.

- pour $n = 0$, on nous donne $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et on vérifie effectivement $u_0 > 0$
- supposons que pour un certain entier n, on ait vérifié $u_n > 0$
  par application de la règle des signes, $2u_n$ est strictement positif
  par ailleurs, $1 + u_n$ est plus grand que u_n, donc strictement positif
  de nouveau, par application de la règle des signes, le quotient $\dfrac{2u_n}{1+u_n}$ est strictement positif
  nous venons de prouver que $u_{n+1} > 0$ et donc que la propriété est héréditaire
- nous pouvons conclure que, **pour tout entier naturel n, $u_n > 0$**

2. a. Calcul de la différence entre deux termes consécutifs de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n}{1+u_n} - u_n \\ &= \frac{u_n - u_n^2}{1+u_n} \\ &= \frac{u_n(1-u_n)}{1+u_n} \end{aligned}$$

Nous avons démontré dans la question précédente $u_n > 0$, ce qui implique $1 + u_n > 0$
D'après l'énoncé, nous savons que $u_n < 1$ et donc que $1 - u_n > 0$
Tous les termes étant strictement positifs, nous pouvons écrire

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-u_n)}{1+u_n} > 0$$

La suite (u_n) est donc croissante.

b. La suite (u_n) est croissante, d'après la question précédente et majorée par 1, d'après l'énoncé : elle est donc **convergente**.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

a. Calculons v_{n+1} en fonction de u_{n+1}, puis en fonction de u_n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}} = \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1 - \dfrac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{3u_n}{1-u_n}$$

Nous obtenons directement $v_{n+1} = 3v_n$, ce qui prouve bien que (v_n) est une suite géométrique de raison 3

b. Le premier terme de la suite (v_n) est $v_0 = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

Par application du cours, pour tout n, $\boxed{v_n = 3^n}$.

c. Partons de l'égalité : $\dfrac{u_n}{1-u_n} = 3^n$

Prenons l'inverse de chaque membre :

$$\frac{1-u_n}{u_n} = \frac{1}{3^n} \iff \frac{1}{u_n} - 1 = \frac{1}{3^n}$$

Nous pouvons maintenant calculer l'inverse de u_n :

$$\frac{1}{u_n} = 1 + \frac{1}{3^n} = \frac{1+3^n}{3^n}$$

D'où le résultat final en prenant de nouveau l'inverse de chaque membre : $\boxed{u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}}$.

d. La forme précédente de u_n étant indéterminée, on met en facteur 3^n au numérateur et au dénominateur. On obtient après simplification :

$$u_n = \frac{1}{1+\frac{1}{3^n}}$$

Sachant $\lim 3^n = +\infty$, on obtient par inverse puis par somme : $\lim 1 + \dfrac{1}{3^n} = 1$

Et finalement par inverse, $\boxed{\lim u_n = 1}$