EXERCICE 1. [5 pts] **Géométrie**

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points $A(0\,;4\,;1)$, $B(1\,;3\,;0)$, $C(2\,;-1\,;-2)$ et $D(7\,;-1\,;4)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D est de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2\,;-1\,;3)$.
a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC) .
b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

3. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.
a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
b) Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= -4t-2 \\ y &= t \\ z &= 3t+2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

EXERCICE 2. [5 pts] Suites

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i allant de 1 à n :
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a) Donner une valeur à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b) Que permet de calculer cet algorithme ?

c) Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on faire concernant la suite (u_n) ?

2. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 2$.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite v_n définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

d) Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999\,9$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

EXERCICE 3. [5 pts] Probabilités

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.
La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leq x)$	0,035	0, 086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $P(390 \leq X \leq 410)$.
2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la la valeur de σ sans modifier selle de μ.
   Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96% ? On arrondira le résultat au dixième.
   On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leq -1,751) \approx 0,040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96% de pains commercialisables.
Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.
2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.
   Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement, sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

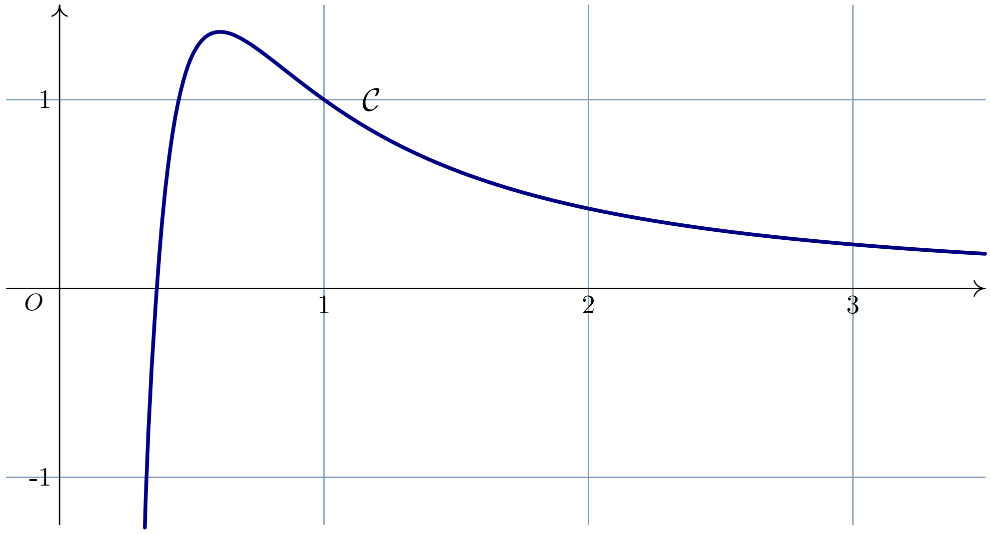
Dans toute la suite, on prendra $\lambda = 0,003$.

2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?

3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

EXERCICE 4. [5 pts] Fontions

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ par
$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$
et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous.



1. **a)** Étudier la limite de f en 0.

b) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.

2. **a)** On note f' la dérivée de la fonction f . sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]0\,,+\infty[$,
$$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}$$

b) Résoudre sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$, l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de la fonction f .

3. **a)** Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses dont on précisera les coordonnées.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = n$.

a) Démontrer que $0 \leq I_2 \leq e - \dfrac{1}{2}$.

On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{-2-\ln(x)}{x}$ est une primitive de la fonction f sur $]0\,,+\infty[$.

b) Calculer I_n en fonction de n.

c) Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

EXERCICE 1. Géométrie

1. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}(1\,;-1\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(2\,;-5\,;-3)$
Ces vecteurs n'étant pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. a) Il suffit de vérifier que le vecteur $\overrightarrow{u}$, vecteur directeur de Δ, est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AB} &= 2\times 1+-1\times -1+3\times -1 = 3-3=0 \\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AC} &= 2\times 2+-1\times -5+3\times -3 = 9-9=0 \end{aligned}$$

Par conséquent, Δ est orthogonale au plan (ABC) .

b) On vient de montrer que $\overrightarrow{u}$ est normal au plan (ABC).
Donc un point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ appartient au plan (ABC) lorsque :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AM}=0 \iff 2(x-0)-(y-4)+3(z-1)=0 \iff \boxed{2x-y+3z+1=0}$$

c) Un point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ appartient à la droite Δ lorsqu'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{DM}=t\cdot\overrightarrow{u} \iff \begin{cases} x &= 7+2t \\ y &= -1-t \\ z &= 4+3t \end{cases}$$

d) Les coordonnées du point H correspondent au paramètre t qui vérifie :

$$2(7+2t)-(-1-t)+3(4+3t)+1=0 \iff 28+14t=0 \iff t=-2$$

On en déduit les coordonnées de $H(3\,;1\,;-2)$.

3. a) Le vecteur $\overrightarrow{u_1}(1\,;1\,;1)$ est normal à $\mathcal{P}_1$ et le vecteur $\overrightarrow{u_2}(1\,;4\,;0)$ est normal à $\mathcal{P}_2$.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont donc sécants.

b) On résout le système formé des équations cartésiennes des deux plans en posant $y=t$ où t est un paramètre réel arbitraire.

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x+4y &= -2 \\ y &= t \end{cases} \iff \begin{cases} z &= -x-y \\ x &= -2-4t \\ y &= t \end{cases}$$

La droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= -4t-2 \\ y &= t \\ z &= 3t+2 \end{cases} ,t\in\mathbb{R}$$

c) Le vecteur $\overrightarrow{v}(-4\,;1\,;3)$ est un vecteur directeur de d et le vecteur $\overrightarrow{u}(2\,;-1\,;3)$ est normal au plan (ABC). La droite est parallèle au plan lorsque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux. On calcule :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=2\times -4-1\times 1+3\times 3=0$$

La droite d est donc parallèle au plan (ABC) .

EXERCICE 2. Suites

1. **a)** Pour $n = 3$, le résultat arrondi au dix-millième est 1,834 .
b) Cet algorithme calcule et affiche le terme de rang n de la suite donnée dans l'énoncé.
c) Il est raisonnable de conjecturer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers 2.

2. **a)** On procède par récurrence sur la rang n.
- pour $n = 0$, $u_0 = 1$ vérifie bien $0 < u_0 \leq 2$
- supposons que l'on a vérifié pour un certain entier n : $0 < u_n \leq 2$
on multiplie chaque membre par $2 > 0$: $0 < 2u_n \leq 4$
on utilise le fait que la racine carrée est strictement croissante : $0 < \sqrt{2u_n} \leq 2$
on en déduit $0 < u_{n+1} \leq 2$, ce qui prouve que la propriété est héréditaire
- on peut alors conclure que pour tout entier n , $0 < u_n \leq 2$

b) On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$
- pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{2} \approx 1,414$ et on vérifie bien $u_0 \leq u_1$
- supposons que l'on a vérifié pour un certain entier n : $u_n \leq u_{n+1}$
on multiplie chaque membre par $2 > 0$: $2u_n \leq 2u_{n+1}$
on utilise le fait que la racine carrée est strictement croissante : $\sqrt{2u_n} \leq \sqrt{2u_{n+1}}$
on en déduit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$, ce qui prouve que la propriété est héréditaire
- on peut alors conclure que pour tout entier n , $0 < u_n \leq u_{n+1}$

La suite (u_n) est par conséquent croissante .

c) Puisque la suite (u_n) est croissante et majorée par 2, elle est convergente.

3. On considère la suite v_n définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.
a) On peut calculer v_{n+1} en fonction de v_n :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \ln u_{n+1} - \ln 2 \\
&= \ln \sqrt{2u_n} - \ln 2 \\
&= \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln u_n) - \ln 2 \\
&= \frac{\ln u_n - \ln 2}{2} \\
&= \frac{v_n}{2}
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$
et de premier terme $v_0 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$.

b) Par application du cours : $v_n = v_0\, q^n = -\ln 2 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

On en déduit : $\ln u_n = v_n + \ln 2 = \boxed{-\ln 2 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \ln 2}$ puis $\boxed{u_n = e^{-\ln 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \ln 2}}$

c) Sachant $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on a $\lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, e qui implique $\boxed{\lim u_n = e^{\ln 2} = 2}$

d) L'algorithme suivant détermine la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999\,9$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u \leq 1,999\,9$:
	Affecter à n la valeur $n+1$
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Tant que
Sortie :	Afficher n

EXERCICE 3. Probabilités

Partie A

1. Par lecture du tableau $P(390 \leq X \leq 410) = P(X \leq 410) - P(X \leq 390) = \boxed{0,636}$.

2. D'après l'énoncé, $p = P(X \geq 385) = 1 - P(X \leq 385) = \boxed{0,914}$

3. On cherche à quelle condition $P(X \geq 385) = 0,96 \iff P(X \leq 385) = 0,04$.
On remarque : $X \leq 385 \iff Z = \dfrac{X - 400}{\sigma} \leq \dfrac{-15}{\sigma}$ où Z suit la loi normale centrée réduite.
D'après l'énoncé, cette condition est réalisée pour

$$\frac{-15}{\sigma} = -1,751 \iff \sigma \approx \boxed{8,6}$$

Partie B

1. Pour une proportion donnée $p = 0,96$ de pains commercialisables et un échantillon de $n = 300$ pains prélevés dans la production, les hypothèses $n \geq 30$, $np = 288 \geq 5$ et $n(1-p) = 12 \geq 5$ sont vérifiées.
Le cours donne l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% avec les bornes suivantes :

$$p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,938 \quad \text{et} \quad p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,982$$

2. Dans l'échantillon prélevé, la fréquence des pains commercialisables est $f = \dfrac{283}{300} \approx 0,943$.
Cette fréquence est dans l'intervalle déterminé dans la question précédente : au seuil de 95%, on peut estimer que l'objectif d'obtenir 96% de pains commercialisables est atteint.

Partie C

1. Le cours donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $P(T > t) = e^{-\lambda t}$.
D'après l'énoncé : $P(T \geq 30) = 0,913$. Cette condition se traduit par :

$$e^{-30\lambda} = 0,913 \iff -30\lambda = \ln 0,913 \iff \lambda = \frac{\ln 0,913}{-30} \approx 0,003$$

2. Il s'agit d'une loi de durée de vie sans vieillissement :

$$P_{(T\geq 30)}(T \geq 60) = \frac{P\left[(T \geq 60) \cap (T \geq 30)\right]}{P(T \geq 30)} = \frac{P(T \geq 60)}{P(T \geq 30)} = \frac{e^{-60\lambda}}{e^{-30\lambda}} = e^{-30\lambda}$$

On retrouve $P(T \geq 30) = 0,913$.

3. On vérifie $P(T \geq 365) = e^{-365\lambda} \approx 0,33$: il y a environ une chance sur 3 que la balance fonctionne sans dérèglement au bout d'un an : l'affirmation du vendeur est abusive.
On peut résoudre $e^{-\lambda t} = 0,5 \iff -\lambda t = -\ln 2 \iff t = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \approx 231$. Il y a en réalité une chance sur deux que la balance ne se dérègle pas avant 231 jours.

EXERCICE 4. Fonctions

1. a) D'une part $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^+$ entraîne $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.
D'autre part, le cours donne $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, ce qui implique $\lim\limits_{x\to 0} 1 + \ln x = -\infty$.
Alors, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$.

b) On sait $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. On peut écrire pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\ln x}{x}$.
En appliquant le résultat rappelé et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on obtient par produit et par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

c) Par définition, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote *verticale* à $\mathcal{C}$ car $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
De même, par définition la droite d'équation $y = 0$ est asymptote *horizontale* à $\mathcal{C}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. a) On pose $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = 1 + \ln(x)$ et $v(x) = x^2$.
Les dérivées de ces fonctions sont $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 2x$.
On en déduit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - [1 + \ln(x)] \cdot 2x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{x - 2x - 2x\ln(x)}{x^4} \\ &= \frac{-x - 2x\ln(x)}{x^4} \\ &= \frac{x[-1 - 2\ln(x)]}{x^4} \\ &= \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3} \end{aligned}$$

b) Résolution de l'inéquation pour $x > 0$:

$$-1 - 2\ln(x) > 0 \iff -2\ln(x) > 1 \iff \ln x < -\frac{1}{2} \iff x < e^{-1/2}$$

Nous en déduisons le tableau de signes suivant :

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$-1 - 2\ln(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Sur $]0\,, +\infty[$, $x^3 > 0$: par conséquent $f'(x)$ est du signe de $-1 - 2\ln(x)$ sur cet intervalle.

c) Tableau des variations de la fonction f .

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$e/2$	$\searrow$	0

La fonction admet un maximum en $x = e^{-1/2}$ qui vaut $f(e^{-1/2}) = \dfrac{1-1/2}{e^{-1}} = \dfrac{e}{2}$

3. a) On résout sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ l'équation :

$$f(x) = 0 \iff 1 + \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff x = e^{-1}$$

La courbe $\mathcal{C}$ a donc un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, le point de coordonnées $(e^{-1}\,,0)$.

b) Le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ se déduit des variations de cette fonction qui ont été établies précédemment :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

4. a) Par définition $I_2 = \displaystyle\int_{1/e}^{2} f(x)dx$.

Nous venons de prouver que f est positive pour $x \geq e^{-1}$: la positivité des intégrales définies entraîne $\boxed{I_2 \geq 0}$.

Nous avons également montré que pour tout $x > 0$: $f(x) \leq f(e^{-1}) = \dfrac{e}{2}$

En intégrant cette inégalité sur $\left[e^{-1}\,,2\right]$, on trouve :

$$I_2 \leq \int_{e^{-1}}^{2} \frac{e}{2}dx = \frac{e}{2}\left(2 - \frac{1}{e}\right) = \boxed{e - \frac{1}{2}}$$

b) D'après l'énoncé : $I_n = F(n) - F(e^{-1} = \dfrac{-2-\ln(n)}{n} + \dfrac{2+\ln(e^{-1})}{e^{-1}} = \boxed{e - \dfrac{2}{n} - \dfrac{\ln(n)}{n}}$

c) Sachant $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$, on trouve $\boxed{\lim I_n = e}$

Il s'agit de l'aire du domaine délimité par lz courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses, domaine situé à droite de la droite $x = \dfrac{1}{e}$.