EXERCICE 1. [4 pts] Géométrie

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des propositions est correcte. Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives

$$A(1\,;-1\,;2),\quad B(3\,;3\,;8),\quad C(-3\,;5\,;4)\quad \text{et}\quad D(1\,;2\,;3)$$

On note $\mathcal{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x &= t+1 \\ y &= 2t-1 \\ z &= 3t+2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

et $\mathcal{D}'$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x &= k+1 \\ y &= k+3 \\ z &= -k+4 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+y-z+2=0$.

Question 1 :

Proposition a. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.
Proposition b. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.
Proposition c. Le point C appartient à la droite $\mathcal{D}$.
Proposition d. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales.

Question 2 :

Proposition a. Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$ et est parallèle à la droite $\mathcal{D}'$.
Proposition b. Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}'$ et est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.
Proposition c. Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$ et est orthogonal à la droite $\mathcal{D}'$.
Proposition d. Le plan $\mathcal{P}$ contient les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Question 3 :

Proposition a. Les points A, D et C sont alignés.
Proposition b. Le triangle ABC est rectangle en A.
Proposition c. Le triangle ABC est équilatéral.
Proposition d. Le point D est le milieu du segment $[AB]$

Question 4 :

On note $\mathcal{P}'$ le plan contenant la droite $\mathcal{D}'$ et le point A. Un vecteur normal à ce plan est :

Proposition a. $\vec{n}(-1\,;5\,;4)$
Proposition b. $\vec{n}(3\,;-1\,;2)$
Proposition c. $\vec{n}(1\,;2\,;3)$
Proposition d. $\vec{n}(1\,;1\,;-1)$

EXERCICE 2. `[5 pts]` **Probabilités**

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».
La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.
L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.
Ainsi, dans la production totale, 70% des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30% de la chaîne F_2.
La chaîne F_1 produit 5% de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1%.
On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les événements :
E : « *le petit pot provient de la chaîne* F_2 »
C : « *le petit pot est conforme* »

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. Calculer la probabilité de l'événement :
« *le petit pot est conforme et il provient de la chaîne de production* F_1 »
3. Déterminer la probabilité de l'événement C
4. Déterminer à 10^{-3} près la probabilité de l'événement E sachant que l'événement C est réalisé.

Partie B

1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.
On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,006$.
Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous .

α	β	$P(\alpha \leq X \leq \beta)$
0,13	0,15	0,000 4
0,14	0,16	0,047 8
0,15	0,17	0,499 6
0,16	0,18	0,904 4
0,17	0,19	0,499 6
0,18	0,20	0,047 8
0,19	0,21	0,000 4

Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.
On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart-type σ_2.
On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à 0,99 .
Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

a) Quelle loi la variable aléaoire Z suit-elle ?

b) Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle [0,16 ; 0,18] .

c) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.
On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit une loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$P(-\beta \leq Z \leq \beta)$
2,432 4	0,985
2,457 3	0,986
2,483 8	0,987
2,512 1	0,988
2,542 7	0,989
2,575 8	0,990
2,612 1	0,991
2,652 1	0,992
2,696 8	0,993

EXERCICE 3. [6 pts] **Fontions**

Étant donné un nombre réel k , on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = \frac{1}{1+e^{-kx}}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

Partie A

Dans cette partie, on choisit $k = 1$. On a donc pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

La représentation graphique $\mathcal{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $\left(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$est donnée en ANNEXE, à rendre avec la copie.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Démontrer que , pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$
3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
4. On définit le nombre $I = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.
   Montrer que $I = \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.

Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathcal{C}_{-1}$ d'abscisse x.

On note K le milieu du segment $[MP]$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
3. Tracer $\mathcal{C}_{-1}$ sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_{-1}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
2. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la fonction f_k est strictement croissante.
3. Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) \geq 0,99$.

EXERCICE 4. [5 pts] **Suites**

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 & = 1 \\ v_{n+1} & = \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.

Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme n°1	**Algorithme n°2**	**Algorithme n°3**
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin de l'algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme** Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour **Fin de l'algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin de l'algorithme**

2. Pour $n = 10$, on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.

c) Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B

On considère la suite w_n définie pour tout n entier naturel par : $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

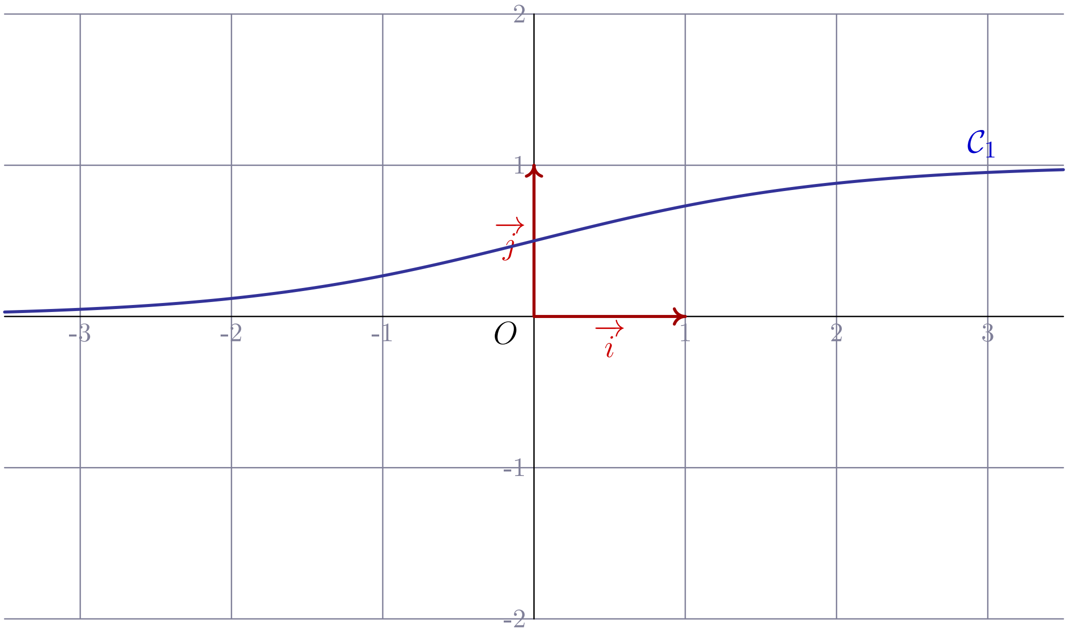
1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$

2. En déduire l'expression de (w_n) puis de (v_n) en fonction de n .

3. Déterminer la limite de la suite (v_n) .

ANNEXE de l'EXERCICE 3, à rendre avec la copie

Représentation graphique $\mathcal{C}_1$ de la fonction f_1



EXERCICE 1. Géométrie

Réponses : **1. d. 2. c. 3. c. 4. b.**

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{u}(1\,;2\,;3)$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est $\overrightarrow{u'}(1\,;1\,;-1)$.
Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est le vecteur de coordonnées $(1\,;1\,;-1)$: il s'agit du vecteur $\overrightarrow{u'}$.

Question 1 :

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u'} = 1\times 1 + 2\times 1 + 3\times(-1) = 0$
Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc orthogonales.

Question 2 :

On peut éventuellement vérifier que $\mathcal{P}$ contient $\mathcal{D}$: $(t+1)+(2t-1)-(3t+2)+2=0$
Mais cette affirmation est présente dans chaque réponse : il faut tester une autre propriété.
Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{u'}$, vecteur directeur de $\mathcal{D}'$
Donc le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$ et est orthogonal à la droite $\mathcal{D}'$.

Question 3 :

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}(2\,;4\,;6)$ $\overrightarrow{AC}(-4\,;6\,;2)$ et $\overrightarrow{AD}(0\,;3\,;1)$
$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires : on ne peut avoir A, D et C alignés
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux car $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-4)+4\times 6+6\times 2 = 28 \neq 0$: le triangle ABC n'est pas rectangle en A
Les coordonnées du milieu de $[AB]$ sont $(2\,;1\,;5)$: ce point n'est pas le point D
Pour vérifier la dernière possibilité, on calcule les coordonnées de $\overrightarrow{BC}(-6\,;2\,;-4)$.
ABC est équilatéral car $AB = AC = BC = \sqrt{56}$

Question 4 :

On détermine dans chaque cas une équation du plan passant par A qui admet $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal.

a. $-1(x-1)+5(y+1)+4(z-2)=0 \iff -x+5y+4z-2=0$
Ce plan ne contient pas $\mathcal{D}'$ car $-(k+1)+5(k+3)+4(-k+4)-2 = 28 \neq 0$

b. $3(x-1)-(y+1)+2(z-2)=0 \iff 3x-y+2z-8=0$
Ce plan contient $\mathcal{D}'$ car $3(k+1)-(k+3)+2(-k+4)-8=0$

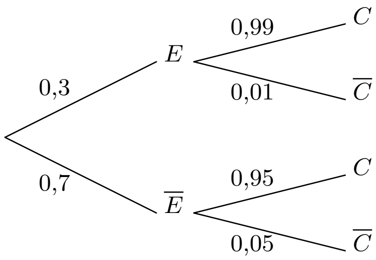
c. $(x-1)+2(y+1)+3(z-2)=0 \iff x+2y+3z-5=0$
Ce plan ne contient pas $\mathcal{D}'$ car $(k+1)+2(k+3)+3(-k+4)-8 = 11 \neq 0$

d. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ ne peut convenir pas car il est vecteur directeur de $\mathcal{D}'$

EXERCICE 2. Probabilités

Partie A

1. Construction d'un arbre pondéré.



2. On demande $P(C \cap \overline{E}) = P(\overline{E}) \cdot P_{\overline{E}}(C) = 0,7 \times 0,95 = \boxed{0,665}$

3. On applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(E \cap C) + P(\overline{E} \cap C) \\ &= P(E)\, P_{E}(C) + P(\overline{E})\, P_{\overline{E}}(C) \\ &= 0,3 \times 0,99 + 0,7 \times 0,95 \\ &= \boxed{0,962} \end{aligned}$$

4. On demande $P_{C}(E) = \dfrac{P(E \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0,297}{0,962} \approx \boxed{0,309}$

Partie B

1. Il s'agit de déterminer $P(0,16 \leq X \leq 0,18)$. On lit le résultat dans le tableau : 0,904 4 .

2. a) Par définition, Z suit la loi normale centrée réduite.

b) On a les équivalences suivantes :

$$0,16 \leq Y \leq 0,18 \iff -0,01 \leq Y - m_2 \leq 0,01 \iff \boxed{\frac{-0,01}{\sigma_2} \leq Z \leq \frac{0,01}{\sigma_2}}$$

c) D'après le tableau fourni dans l'énoncé : $\beta = \dfrac{0,01}{\sigma_2} = 2,575\,8$

On en déduit $\sigma_2 \approx \boxed{0,004}$

EXERCICE 3. Fonctions

Partie A

1. D'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. On a donc par somme puis par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1}$
La droite d'équation $y = 1$ est asymptote *horizontale* à $\mathcal{C}_1$ en $+\infty$.
De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ implique $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = 0}$
La droite d'équation $y = 0$ (ou l'axe des abscisses) est asymptote *horizontale* à $\mathcal{C}_1$ en $-\infty$.

2. On peut transformer $f_1(x)$ en multipliant le numérateur et le dénominateur par e^x :

$$f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^x}{e^x+e^0} = \boxed{\frac{e^x}{1+e^x}}$$

3. On peut calculer f_1' en appliquant la formule de dérivation d'un quotient.
Soit d'une part $u(x) = e^x$ et $u'(x) = e^x$ et d'autre part $v(x) = e^x + 1$ et $v'(x) = e^x$.
On obtient :

$$f_1'(x) = \frac{e^x \cdot (e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = \boxed{\frac{e^x}{(e^x+1)^2}}$$

Puisque l'exponentielle est strictement positive, cette dérivée est également strictement positive : la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
$f_1'(x)$	$+$
$f_1(x)$	$0 \nearrow 1$

4. Nous pouvons écrire $f_1(x) = \dfrac{v'(x)}{v(x)}$ où $v(x) = e^x + 1$.

Puisque v est strictement positive, une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = \ln u(x) = \ln(e^x+1)$.

On en déduit $I = F(1) - F(0) = \ln(e+1) - \ln 2 = \boxed{\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)}$

Comme la fonction f_1 est positive sur $[0\,,1]$, cette intégrale mesure l'**aire** du domaine délimité par $\mathcal{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie B

1. Si $k = -1$, alors $f_k(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

On en déduit pour tout réel x : $f_1(x) + f_{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} + \dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{e^x+1}{e^x+1} = \boxed{1}$

2. On peut calculer l'ordonnée du point K :

$$y_K = \frac{y_P + y_M}{2} = \frac{f_1(x) + f_{-1}(x)}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Ce point appartient bien à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

3. Tracé de $\mathcal{C}_{-1}$: voir la figure.

4. Notons Δ la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ et notons $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par les deux courbes et les droites $x = 0$ et $x = 1$.
Ce domaine peut être partagé en deux parties :

- la partie au-dessus de Δ d'aire $\mathcal{A}_1 = \displaystyle\int_0^1 \left[f_1(x) - \frac{1}{2}\right] \mathrm{d}x$

- la partie en-dessous de Δ d'aire $\mathcal{A}_2 = \displaystyle\int_0^1 \left[\frac{1}{2} - f_{-1}(x)\right] \mathrm{d}x$

L'aire cherchée est donc $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$
Nous venons de démontrer $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$, ce qui est équivalent à :

$$f_1(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - f_{-1}(x)$$

En intégrant cette égalité sur $[0\,,1]$, on obtient $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, ce qui implique $\mathcal{A} = 2\mathcal{A}_1$.
En utilisant la linéarité des intégrales, nous pouvons calculer $\mathcal{A}_1$:

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = I - \frac{1}{2}$$

On en déduit $\mathcal{A} = 2I - 1 = \boxed{2\ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - 1}$

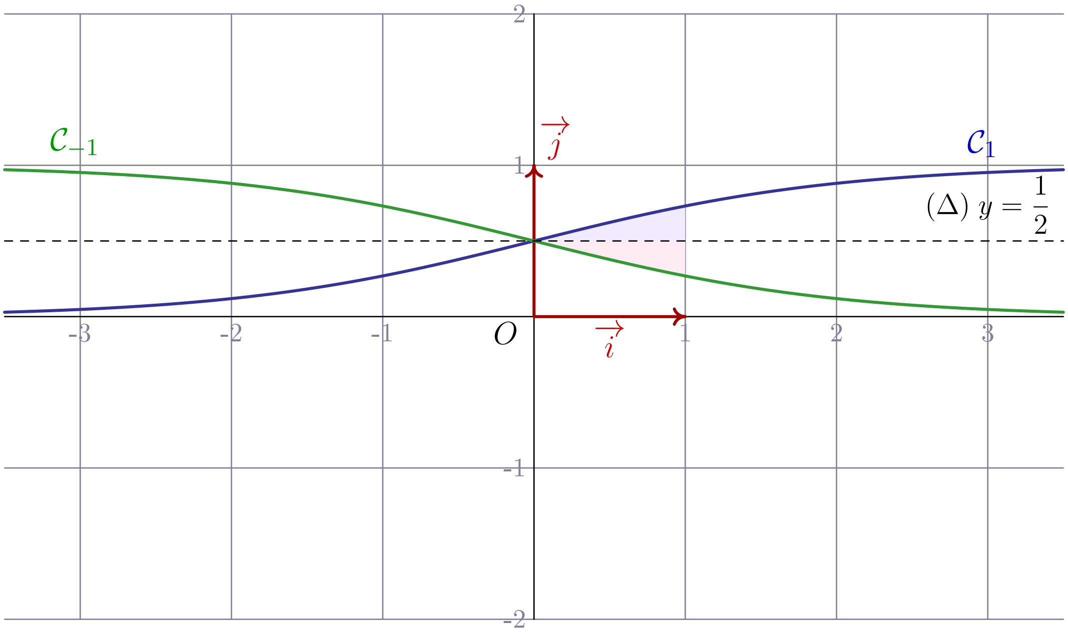


Figure 1 Courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{-1}$ des fonctions f_1 et f_{-1}

Partie C

1. VRAI
D'une part $\mathcal{C}_k$ est strictement au-dessus de l'axe des abscisses car $f_k(x)$ est strictement positive en tant que quotient de deux termes strictement positifs.
D'autre part , $\mathcal{C}_k$ est strictement en dessous de la droites d'équation $y = 1$ car :

$$1 - f_k(x) = 1 - \frac{1}{1+e^{-kx}} = \frac{e^{-kx}}{1+e^{-kx}} > 0$$

2. FAUX
La fonction f_{-1} est manifestement décroissante. Calculons sa dérivée :

$$f_{-1}(x) = \frac{1}{1+e^{x}} \Longrightarrow f'_{-1}(x) = \frac{-e^{x}}{(1+e^{x})^2}$$

Cette expression est strictement négative puisque l'exponentielle est strictement positive.

3. VRAI
On résout l'inéquation :

$$\frac{1}{1+e^{-k/2}} \geq 0,99 \iff 1 + e^{-k/2} \leq \frac{100}{99} \iff e^{-k/2} \leq \frac{1}{99}$$

Cette inégalité est équivalente à : $\dfrac{-k}{2} \leq -\ln 99 \iff k \geq 2\ln 99 \approx 9,19$
Le résultat est donc bien vérifié si $k \geq 10$.

EXERCICE 4. Suites

Partie A

1. L'algorithme n°1 ne convient pas car il n'affiche qu'une valeur de la suite, la dernière.
L'algorithme n°2 ne convient pas car il affiche toujours la même valeur, la première.
Donc c'est l'algorithme n°3 qui convient.

2. On peut conjecturer que la suite (v_n) est croissante et convergente vers un réel approximativement égal à 2,970 .

3. a) Démonstration par récurrence.
- pour $n = 0$ on a $v_n = 1$ et par conséquent $1 < v_0 < 3$
- supposons avoir vérifié pour un certain entier n : $0 < v_n < 3$
  on multiplie chacun des trois membres par -1 : $-3 < -v_n < 0$
  on ajoute 6 à chacun des trois membres : $3 < 6 - v_n < 6$
  sachant que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,,+\infty[$, on écrit :
  $$\frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3}$$
  on multiplie chacun des trois membres par 9 : $\dfrac{3}{2} < \dfrac{9}{6 - v_n} < 3$
  on en déduit $0 < v_{n+1} < 3$, ce qui prouve que la propriété est héréditaire.
- conclusion : pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$

b) Calcul de la différence entre deux termes consécutifs :
$$v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6 - v_n} - v_n = \frac{9 - 6v_n + v_n^2}{6 - v_n} = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$$
On a démontré $v_n < 3$, ce qui implique $6 - v_n > 3 - v_n > 0$: la suite (v_n) est donc strictement croissante.
Cette suite est effectivement monotone.

c) La suite (v_n) est convergente en tant que suite croissante et majorée.

Partie B

1. On calcule la différence entre deux termes consécutifs :
$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{v_{n+1} - 3} - \frac{1}{v_n - 3} = \frac{v_n - v_{n+1}}{(v_{n+1} - 3)(v_n - 3)}$$
On a déjà calculé $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$ dans la partie **A** .
On calcule maintenant : $v_{n+1} - 3 = \dfrac{9}{6 - v_n} - 3 = \dfrac{-9 + 3v_n}{6 - v_n} = \dfrac{-3(3 - v_n)}{6 - v_n}$.
On peut maintenant simplifier la différence :
$$w_{n+1} - w_n = \frac{-\dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}}{\dfrac{-3(3 - v_n)}{6 - v_n} \times (v_n - 3)} = -\frac{1}{3}$$
Donc (w_n) est une suite arithmétique de raison $r = -\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $w_0 = -\dfrac{1}{2}$.

2. On applique le cours : $w_n = w_0 + nr = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{n}{3} = -\dfrac{2n + 3}{6}$
On en déduit :
$$v_n - 3 = \frac{1}{w_n} = \frac{-6}{2n + 3} \iff \boxed{v_n = 3 - \frac{6}{2n + 3}}$$

3. Sachant $\lim 2n + 3 = +\infty$, on obtient par quotient puis par différence : $\boxed{\lim v_n = 3}$