p.317 n° 100

1. Le vecteur $\overrightarrow{n}(1\,;2\,;-1)$ est normal au plan (P)
Le vecteur $\overrightarrow{n'}(-1\,;1\,;1)$ est normal au plan (P')
Ces deux vecteurs sont orthogonaux car

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n\prime} = 1\times -1 + 2\times 1 + -1\times 1 = 0$$

Donc (P) et (P') sont perpendiculaires.

2. $\boxed{\text{méthode 1}}$
On sait que les deux plans sont sécants car les deux vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.
On vérifie que (D) est contenue dans (P) et dans (P') :

$$D\subset P \text{ car } -\frac{1}{3}+t+2\left(-\frac{1}{3}\right)-t+1=0$$

$$D\subset P' \text{ car } -\left(-\frac{1}{3}+t\right)+-\frac{1}{3}+t=0$$

Donc (D) est la droite d'intersection des deux plans.

$\boxed{\text{méthode 2}}$
On résout le système formé par les deux équations cartésiennes en posant $z=t$ où t est un paramètre réel arbitraire.

$$\begin{cases} x+2y-z+1 &= 0\\ -x+y+z &= 0\\ z &= t\end{cases} \iff \begin{cases} x+2y &= t-1\\ -x+y &= -t\\ z &= t\end{cases}$$

La deuxième ligne implique $y=x-t$.
En remplaçant y par $x-t$ dans la première ligne, on obtient :

$$x+2(x-t)=t-1 \iff x=-1/3+t$$

La droite d'intersection a donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= -1/3+t\\ y &= -1/3 \qquad t\in\mathbb{R}\\ z &= t\end{cases}$$

p.318 n° 107

1. a) Coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}(3\,;2\,;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(0\,;2\,;1)$
Produit scalaire : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times 0+2\times 2+-2\times 1=2$
Longueur $AB=\sqrt{3^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{17}$
Longueur $AC=\sqrt{0^2+2^2+1^2}=\sqrt{5}$

b) Soit α une mesure de $\widehat{BAC}$. Appliquons la *formule du cosinus*

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\,AC\,\cos\alpha \iff \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{17}\sqrt{5}}$$

De $\cos\alpha\approx 0,217$ on déduit $\alpha\approx 77°$.

c) Il est clair que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

2. Les coordonnées des points A , B et C vérifient l'équation du plan :

$$2x_A-y_A+2z_A+2=-4-0+2+2=0$$
$$2x_B-y_B+2z_B+2=2-2-2+2=0$$
$$2x_C-y_C+2z_C+2=-4-2+4+2=0$$

Le plan (ABC) est donc le plan d'équation $2x-y+2z+2=0$.

3. On résout le système formé par les deux équations cartésiennes en posant $z = t$ où t est un paramètre réel arbitraire.

$$\begin{cases} x + y - 3z + 3 & = & 0 \\ x - 2y + 6z & = & 0 \\ z & = & t \end{cases} \iff \begin{cases} x + y & = & 3t - 3 \\ x - 2y & = & -6t \\ z & = & t \end{cases}$$

La deuxième ligne donne $x = 2y - 6t$ qu'on reporte dans la première ligne :

$$2y - 6t + y = 3t - 3 \iff y = -1 + 3t$$

La droite d'intersection a donc pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x & = & -2 \\ y & = & -1 + 3t \\ z & = & t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

4. Un vecteur directeur de (D) est $\overrightarrow{u}(0\,;3\,;1)$

Un vecteur normal à (ABC) est $\overrightarrow{n}(2\,;-1\,;2)$

On calcule : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \times 2 + 3 \times -1 + 1 \times 2 = -1 \neq 0$

Les vecteurs n'étant pas orthogonaux, la droite (D) n'est pas parallèle au plan (P).

Pour calculer les coordonnées du d'intersection I, on reporte l'expression des coordonnées des points de la droite (D) en fonction du paramètre t, dans l'équation du plan (P) :

$$2(-2) - (-1 + 3t) + 2t + 2 = 0 \iff t = -1$$

On en déduit $I(-2\,;-4\,;-1)$.

5. **a)** Équation cartésienne de (S) :

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$$

$$\iff x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2z + 2 = 0$$

b) On reporte l'expression des coordonnées des points de la droite (D) en fonction du paramètre t, dans l'équation de la sphère (S) :

$$(-2-1)^2 + (-1+3t+3)^2 + (t-1)^2 = 9$$

$$\iff 9 + (3t+2)^2 + (t-1)^2 = 9$$

$$\iff 10t^2 + 10t + 5 = 0$$

$$\iff 2t^2 + 2t + 1 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = -4 < 0$. Cette équation n'a donc pas de solution : la droite (D) et la sphère (S) n'ont aucun point d'intersection.

c) La droite qui passe par Ω et qui est perpendiculaire à (ABC) admet pour représentation paramétrique le système :

$$\begin{cases} x & = & 1 + 2t \\ y & = & -3 - t \\ z & = & 1 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Elle coupe le plan (ABC) en un point H. Le paramètre qui correspond au point H vérifie :

$$2(1+2t) - (-3-t) + 2(1+2t) + 2 = 0 \iff t = 1$$

D'où les coordonnées de $H(3\,;-4\,;3)$

On vérifie pour finir que $H \in S$:

$$\Omega H = \sqrt{(3-1)^2 + (-4+3)^2 + (3-1)^2} = 3$$

P est tangent à S en H puisque $H \in P \cap S$ et $(\Omega H) \perp (P)$.