EXERCICE 1. [5 pts] Fonctions

Partie 1.

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type

$$h(t) = \frac{a}{1 + b\,e^{-0,04t}}$$

où a et b sont des constantes réelles, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plan exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure 0,1m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2m.

Déterminer les constantes a et b afin que la hauteur h corresponde à la hauteur du plant de maïs étudié.

Partie 2.

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 250]$ par

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19\,e^{-0,04t}}$$

1. Déterminer $f'(t)$ en fonction de t. En déduire les variations de f.

2. Quel est le temps nécessaire pour que ce plant atteigne une hauteur supérieure à 1,5m ?

3. a) Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 250]$:

$$f(t) = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}$$

Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 250]$ par

$$F(t) = 50\ln\left(e^{0,04t} + 19\right)$$

est une primitive de la fonction f

b) Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50\ ;\ 100]$.

En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter le résultat.

EXERCICE 2. [5 pts] Complexes

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(0\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$ (unité : 2cm) on considère les points A et B d'affixes respectives $Z_{\text{A}} = 1$ et $Z_{\text{B}} = i$.

À tout point M d'affixe $Z_{\text{M}} = x + iy$ (où x et $y \neq 0$ sont réels) on associe le point M′ d'affixe $Z_{\text{M}'} = -i\,Z_{\text{M}}$.

On note enfin I le milieu de [AM].

1. Dans cette question, M est le point d'affixe $Z_{\text{M}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

a) Déterminer la forme algébrique de Z_{M}.

b) Montrer que $Z_{\text{M}'} = -\sqrt{3} - i$.

Déterminer le module et un argument de $Z_{\text{M}'}$.

c) Faire une figure où seront placés les points A, B, M, M′ et I.

Vérifier que les droites (OI) et (BM′) sont perpendiculaires.

2. On revient au cas général en posant $Z_{\text{M}} = z = x + iy\ ,\ y \neq 0$.

a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y

Déterminer l'affixe $Z_{\text{M}'}$ du point M′ en fonction de x et y.

b) Écrire les coordonnées des points I , B et M′.
Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM′
Montrer que BM′ = 2 OI .

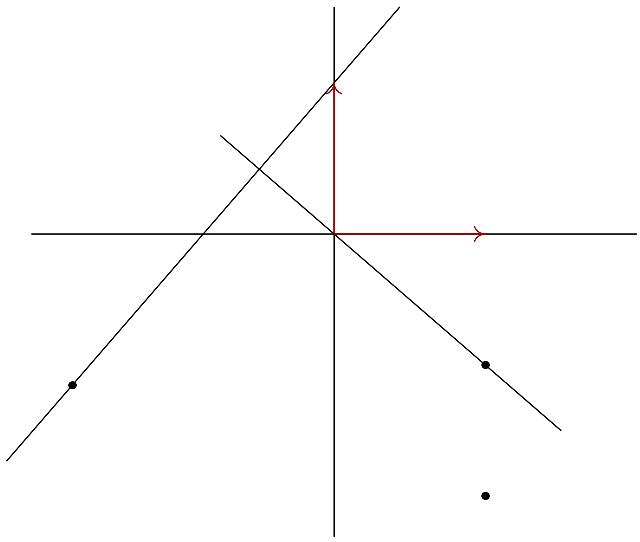
EXERCICE 3. [6 pts] Probabilités

Dans une entreprise, on étudie la probabilité qu'un salarié choisi au hasard soit absent pour cause de maladie au cours d'une épidémie de grippe.
Pour tout $n \geq 1$, on désigne par E_n l'événement :
« *le salarié choisi est absent au cours de la n-ième semaine* »
On note enfin p_n la probabilité de l'événement E_n.
On a les données suivantes :

- il n'y a pas de salarié absent la première semaine : $p_1 = 0$
- sachant que le salarié n'est pas absent la n-ième semaine , la probabilité qu'il soit absent la semaine suivante est de 0,04
- sachant que le salarié est absent la n-ième semaine , la probabilité qu'il soit absent la semaine suivante est de 0,24

1. a) Calculer p_3 à l'aide d'un arbre de probabilités
b) Sachant que le salarié est absent la troisième semaine, quelle est la probabilité qu'il ait été absent la deuxième semaine ?

2. a) Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant :



b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $p_{n+1} = 0,2\, p_n + 0,04$
c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique.
d) Exprimer p_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (p_n).

e) On admet que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables       K et J sont des entiers naturels
                P est un nombre réel
Initialisation  P prend la valeur 0
                J prend la valeur 1
Entrée          Saisir la valeur de K
Traitement      Tant que P < 0,05 − 10^K
                   P prend la valeur 0,2 × P + 0,04
                   J prend la valeur J + 1
                Fin tant que
Sortie          Afficher J
```

À quoi correspond l'affichage final J ?
Pourquoi est-on sur que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. On admet que la probabilité qu'un employé soit malade une semaine donnée est $p = 0,05$.
On suppose que l'état de santé d'un salarié est indépendant de l'état de santé de ses collègues.
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

a) Justifier que X suit une loi binômiale.
Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart-type σ de X

b) Sachant qu'on peut approcher la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'événement $(7 \leq X \leq 15)$

EXERCICE 1. Fonctions

Partie 1.
Le texte impose les deux conditions suivantes :

(1) $h(0) = 0,1 \iff \dfrac{a}{1+b} = 0,1$

(2) $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 2$

Calculons d'abord $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)$: on vérifie $\lim\limits_{t\to+\infty} -0,04t = -\infty$ et sachant $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, on obtient $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,04t} = 0$

Par somme puis par quotient, il vient $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = a$, ce qui implique $\boxed{a = 2}$

On obtient ensuite, en reportant cette valeur dans la première égalité :

$$\frac{2}{1+b} = 0,1 \iff 20 = 1 + b \iff \boxed{\text{b} = 19}$$

Partie 2.

1. $f'(t) = 2 \times \dfrac{-(19 \times -0,04e^{-0,04t})}{(1+19\,e^{-0,04t})^2} = \dfrac{1,52\,e^{-0,04t}}{(1+19\,e^{-0,04t})^2}$

L'exponentielle étant strictement positive, il en est de même de $f'(t)$: la fonction f est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. $f(t) \geq 1,5 \iff 2 \geq 1,5 + 28,5\,e^{-0,04t} \iff \dfrac{0,5}{28,5} \geq e^{-0,04t}$

Cette inégalité est équivalente à $\ln\dfrac{1}{59} \geq -0,04t \iff t \geq \dfrac{\ln 59}{0,04} \approx \boxed{101{,}93}$

Le plant de maïs dépassera 1,5m au bout de 102 jours.

3. a) On multiplie le numérateur et le dénominateur par $e^{0,04t}$:

$$f(t) = \frac{2}{1+19\,e^{-0,04t}} \times \frac{e^{0,04t}}{e^{0,04t}} = \frac{2\,e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}$$

Posons $u(t) = e^{0,04t} + 19$ et donc $u'(t) = 0,04\,e^{0,04t}$. On obtient :

$$F'(t) = 50\,\frac{u'(t)}{u(t)} = \frac{2\,e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19} = f(t)$$

b) La valeur moyenne est

$$m = \frac{1}{100-50}\int_{50}^{100} f(t)dt = \frac{F(100)-F(50)}{50} \approx \boxed{1{,}03}$$

Entre 50 et 100 jours, la hauteur moyenne d'un plant de maïs est d'environ 1m.

EXERCICE 2. Complexes

1. a) Forme algébrique de Z_{M} :

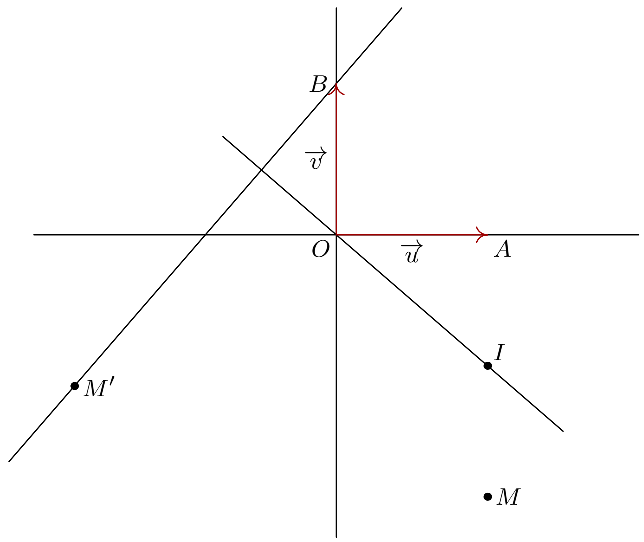
$$Z_{\text{M}} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{1 - i\sqrt{3}}$$

b) Affixe de l'image de Z_{M} : $Z_{\mathrm{M'}} = -i\,Z_{\mathrm{M}} = -i + i^2\sqrt{3} = \boxed{-\sqrt{3} - i}$

Soit r le module de $Z_{\mathrm{M'}}$: $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = \boxed{2}$

Soit θ un argument de $Z_{\mathrm{M'}}$: $\begin{cases} \cos\theta & = & \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta & = & \dfrac{-1}{2} \end{cases} \iff \theta = \boxed{-\dfrac{5\pi}{6}} + k\,2\pi \qquad k \in \mathbb{R}$

c) <u>Figure</u>



L'affixe du point I est $z_I = \dfrac{z_A + z_M}{2} = \dfrac{2 - i\sqrt{3}}{2}$.

On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OI}\left(1\,; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{BM'}$ est $z_{\overrightarrow{BM'}} = z_{M'} - z_B = -\sqrt{3} - 2i$

On en déduit les coordonnées : $\overrightarrow{BM'}\left(-\sqrt{3}\,; -2\right)$

On vérifie que ces deux vecteurs sont orthogonaux en calculant leur produit scalaire :

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BM'} = 1 \times -\sqrt{3} + -\frac{\sqrt{3}}{2} \times -2 = 0$$

Les droites (OI) et (BM′) sont donc perpendiculaires.

2.
a) Affixe du point I : $z_I = \dfrac{z_A + z_M}{2} = \dfrac{1 + x + iy}{2}$.

Affixe du point M' : $Z_{\mathrm{M'}} = -i(x + iy) = y - ix$

b) Coordonnées du point I $\left(\dfrac{x+1}{2}\,; \dfrac{y}{2}\right)$

Coordonnées du point B $(0\,; 1)$

Coordonnées du point M′ $(y\,; -x)$

On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OI}}\left(\dfrac{x+1}{2}\,; \dfrac{y}{2}\right)$

puis les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BM'}}\,(y\,; -x-1)$

On vérifie que ces deux vecteurs sont orthogonaux en calculant leur produit scalaire :

$$\frac{x+1}{2} \cdot y + \frac{y}{2} \cdot -(x+1) = \frac{(x+1)y - (x+1)y}{2} = 0$$

$\boxed{\text{La droite (OI) est donc une hauteur du triangle OBM}'}$

On calcule ensuite $\mathrm{BM'} = \sqrt{y^2 + (x+1)^2}$

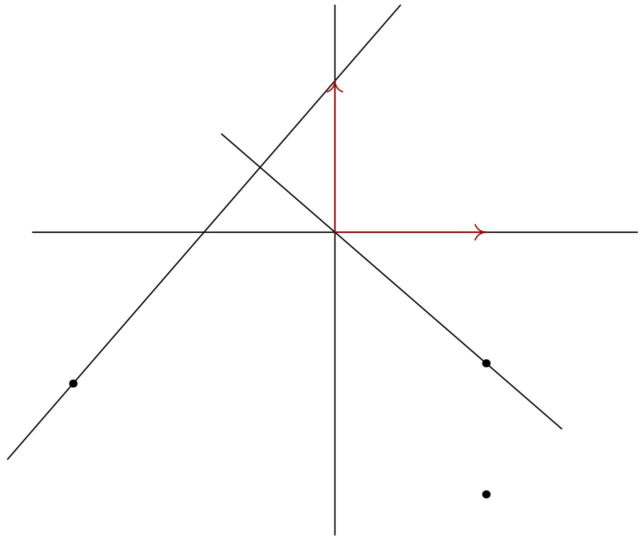
puis $\mathrm{OI} = \sqrt{\dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}{2} = \dfrac{\mathrm{BM}'}{2}$

On en déduit $\boxed{\mathrm{BM}' = 2\ \mathrm{OI}}$

EXERCICE 3. Probabilités

1. a) Calcul de p_3 .

La première semaine, aucun salarié n'est absent pour cause de maladie.

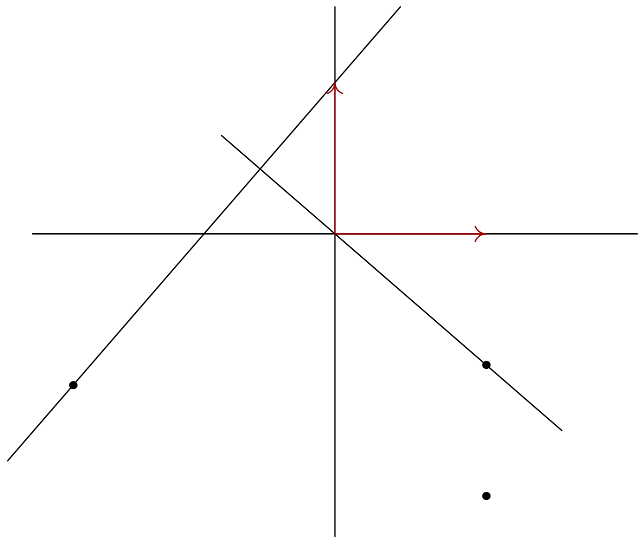


On calcule p_3 par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(E_3) &= p(E_3 \cap E_2) + p(E_3 \cap \overline{E_2}) \\ &= p(E_2)\, p_{E_2}(E_3) + p(\overline{E_2})\, p_{\overline{E_2}}(E_3) \\ &= 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 \\ &= \boxed{0{,}048} \end{aligned}$$

b) $p_{E_3}(E_2) = \dfrac{p(E_3 \cap E_2)}{p(E_3)} = \dfrac{0,0096}{0,048} = \boxed{0{,}2}$

2. a) Arbre de probabilités.



b) On applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = p(E_{n+1}) &= p(E_{n+1} \cap E_n) + p(E_{n+1} \cap \overline{E_n}) \\ &= p(E_n)\, p_{E_n}(E_{n+1}) + p(\overline{E_n})\, p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \\ &= p_n \times 0,24 + (1 - p_n) \times 0,04 \\ &= 0,2\, p_n + 0,04 \end{aligned}$$

c) On calcule u_{n+1} en fonction de u_n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0,05 \\ &= 0,2\, p_n + 0,04 - 0,05 \\ &= 0,2\, p_n - 0,01 \\ &= 0,2\,(p_n - 0,05) \\ &= 0,2\, u_n \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (u_n) est géométrique.
Le premier terme est $u_1 = p_1 - 0,05 = -0,05$ et la raison est $q = 0,2$

d) Sachant $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = -0,05 \cdot 0,2^{n-1}$, on peut écrire

$$p_n = u_n + 0,05 = -0,05 \cdot 0,2^{n-1} + 0,05$$

D'autre part $-1 < 0,2 < 1$ implique $\lim 0,2^{n-1} = 0$
On a donc $\lim p_n = 0,05$

e) Dans cet algorithme, J désigne le plus petit entier n pour lequel la distance entre u_n et sa limite $0,05$ est inférieure à 10^{K} .
On est certain que l'algorithme s'arrête car la suite converge vers le réel $0,05$

3. a) On est dans la situation du schéma de Bernoulli : une même expérience est répétée n fois et les résultats sont indépendants. La variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres $n = 220$ et $p = 0,05$
Son espérance est $\mu = 220 \times 0,05 = 11$
et son écart-type est $\sigma = \sqrt{220 \times 0,05 \times 0,95} = \sqrt{10,45}$

b) On vérifie :

$$\begin{aligned} 7 \leq X \leq 15 &\iff -4 \leq X - \mu \leq 4 \\ &\iff \frac{-4}{\sqrt{10,45}} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{4}{\sqrt{10,45}} \end{aligned}$$

La calculatrice donne $P(7 \leq X \leq 15) \approx 0,78$