p.217 n° 156

1. Calcul de la dérivée de F :

$$F'(x) = -e^{-x} - (x+1) \times -e^{-x} = x\,e^{-x}$$

Par conséquent, F est une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$:

$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x}\mathrm{d}x = F(1) - F(0- = 1 - \frac{2}{e}$$

2. a) La fonction f_n est positive : par conséquent I_n est l'aire sous la courbe de f_n entre 0 et 1. On peut conjecturer que pour tout n, la courbe de f_{n+1} est en-dessous de celle de f_n et donc que l'aire sous la courbe de f_{n+1} est inférieure à l'aire sous la courbe de f_n.
La suite (I_n) paraît être décroissante.

b) On cherche à comparer les deux fonctions à intégrer sur $[0\,;1]$:

$$0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow x^{n+1} \leq x^n$$

On multiplie les deux membres par $e^{-x} > 0$:

$$x^{n+1}\,e^{-x} \leq x^n\,e^{-x}$$

On peut maintenant intégrer cette inégalité sur $[0\,;1]$:

$$\int_0^1 x^{n+1}\,e^{-x}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,e^{-x}\mathrm{d}x$$

On a donc démontré que (I_n) est décroissante.

c) L'exponentielle étant positive, la fonction f_n positive. Alors, la positivité des intégrales implique $I_n \geq 0$ pour tout n.
La suite (I_n) est convergente en tant que suite décroissante et minorée.

d) Ne sachant pas intégrer f_n, on cherche un encadrement de cette fonction sur $[0\,;1]$.
Pour tout $x \in [0\,;1]$, on remarque que

$$-x \leq 0 \Longrightarrow e^{-x} \leq 1$$

On multiplie les deux membres par $x^n \geq 0$:

$$x^n\,e^{-x} \leq x^n$$

On intègre cette inégalité :

$$\int_0^1 x^n\,e^{-x}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\mathrm{d}x$$

On en déduit :

$$I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

On a donc démontré que pour tout n, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

Sachant $\lim \dfrac{1}{n+1} = 0$, on obtient $\lim I_n = 0$ en appliquant le théorème des gendarmes.

p.219 n° 165

Partie A

1. a) On écrit pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{x^2}{x} \times \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$$

D'une part, on sait : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

D'autre part, on vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Or d'après les résultats sur la croissance comparée : $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$

On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^{x^2}} = 0$ puis $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

b) On calcule la dérivée :

$$f'(x) = e^{-x^2} + x \times -2x\, e^{-x^2} = \left(1-2x^2\right) e^{-x^2}$$

L'exponentielle étant strictement positive, $f'(x)$ est du signe de

$$1-2x^2 = (1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})$$

L'intervalle d'étude est $[0\,;+\infty[$: par conséquent le facteur $(1+x\sqrt{2})$ est strictement positif et $f'(x)$ est du signe de $(1-x\sqrt{2})$.

Nous pouvons remarquer : $1-x\sqrt{2} = 0 \iff x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Et de même : $1-x\sqrt{2} > 0 \iff 1 > x\sqrt{2} \iff x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Le tableau de variations de f s'en déduit :

x	0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	0

La fonction admet un maximum en $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ qui vaut :

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2e}}}$$

2. La fonction f étant positive sur $[0\,;a]$, l'aire est :

$$F(a) = \int_0^a x\, e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

On pose $u(x) = -x^2$ et $u'(x) = -2x$, ce qui permet d'écrire

$$f(x) = -\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$$

Une primitive de f est donc $G(x) = -\dfrac{1}{2}e^{u(x)} = \dfrac{-e^{-x^2}}{2}$

On en déduit : $F(a) = \dfrac{1-e^{-a^2}}{2}$

Sachant $\lim\limits_{a\to+\infty} a^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = 0$, on obtient $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-a^2} = 0$

D'où le résultat : $\boxed{\lim\limits_{a\to+\infty} F(a) = \dfrac{1}{2}}$.

Partie B

1. a) Pour tout $n \geq 2$, la fonction f est décroissante sur $[n\,;n+1]$ car le maximum de la fonction est atteint en $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

On peut donc écrire pour tout $x \in [n\,;n+1]$:
$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$
On intègre ces inégalités :
$$\int_n^{n+1} f(n+1)\mathrm{d}x \leq \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_n^{n+1} f(n)\mathrm{d}x$$
On sait intégrer une constante : $\displaystyle\int_a^b k\mathrm{d}x = [kx]_a^b = kb - ka = k(b-a)$

On en déduit :
$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leq f(n)$$

b) Le résultat précédent implique :
$$u_{n+1} \leq f(n+1) \leq u_n$$
La suite (u_n) est décroissante.

c) On sait que f est positive, ce qui entraîne,du fait de la positivité des intégrales, que u_n est positive.
La suite (u_n) converge ent tant que suite décroissante et minorée.

2. a) Il suffit d'appliquer la relation de Chasles :
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \ldots + \int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x = \int_0^n f(x)\mathrm{d}x$$
On en déduit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = F(n)$

b) On peut prévoir que $F(n)$ tend vers $0,5$, ce qui confirme le résutat de la question **A 2**