p.40 n° 98

1. a) Loyer payé la première année : $\boxed{u_0 = 12\,000}$
Loyer payé la deuxième année :
$$u_1 = 12\,000 + 0,05 \cdot 12\,000 = \boxed{12\,600}$$
b) Relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + 0,05 \cdot u_n = 1,05 \cdot u_n$
La suite est **géométrique** de raison $1,05$, ce qui implique
$$u_8 = 1,05^8\, u_0 \approx \boxed{17\,729}$$
c) La somme des loyers payés est $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_8$. On peut appliquer la formule du cours donnant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :
$$S = 12\,000\,\frac{1,05^9 - 1}{1,05 - 1} \approx \boxed{132\,319}$$

2. a) Loyer payé la première année : $\boxed{v_0 = 12\,000}$
Loyer payé la deuxième année : $v_1 = 12\,000 + 750 = \boxed{12\,750}$
b) Relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + 750$
La suite est arithmétique de raison 750, ce qui implique
$$u_8 = u_0 + 8 \times 750 = \boxed{18\,000}$$
c) La somme des loyers payés est $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_8$. On peut appliquer la formule du cours donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :
$$S = \frac{(12\,000 + 18\,000) \times 9}{2} = \boxed{135\,000}$$

3. Le contrat n° 1 est plus avantageux.

p.45 n° 115

1. La suite est définie par $w_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$:
$$w_n = \frac{n+1}{n} w_{n-1} + \frac{1}{n}$$
On remplace n par 1 : $w_1 = \frac{2}{1}\, w_0 + \frac{1}{1} = 3$
On remplace n par 2 : $w_2 = \frac{3}{2}\, w_1 + \frac{1}{2} = 5$
On remplace n par 3 : $w_3 = \frac{4}{3}\, w_2 + \frac{1}{3} = 7$
On remplace n par 4 : $w_4 = \frac{5}{4}\, w_3 + \frac{1}{4} = 9$

2. a) L'algorithme de l'énoncé peut être programmé par exemple avec Algobox : ouvrir le fichier joint `dm1.alg` ou bien ouvrir `dm1-algo.pdf` pour voir le code et le résultat de son fonctionnement .
Attention : il faut arrondir les termes successifs de la suite sinon la boucle ne se terminera pas du fait des approximations de calcul qui sont faites en javascript.
b) Lorsque l'utilisateur donne un entier impair, l'algorithme donne le rang de la suite (w_n) qui a cette valeur.
c) Il est raisonnable de conjecturer que $w_n = 2n + 1$
d) On procède par récurrence sur n
- pour $n = 0$, on a $w_n = 1$ et $2n + 1 = 1$: l'égalité est vérifiée
- supposons le résultat vérifié pour un certain entier $n - 1$:

$$w_{n-1} = 2(n-1) + 1 = 2n - 1$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{n+1}{n} w_{n-1} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{n+1}{n}(2n-1) + \frac{1}{n} \\ &= \frac{(n+1)(2n-1)+1}{n} \\ &= \frac{2n^2+n}{n} \\ &= 2n+1 \end{aligned}$$

le résultat est donc vrai pour n et la propriété est héréditaire

- conclusion : pour tout n, on a $w_n = 2n + 1$

e) De façon évidente $w_{2013} = 4027$