EXERCICE 1

1. Réponse c) . On vérifie en effet :
$$2\,\overline{(3-i)} + (3-i) = 2\,(3+i) + 3 - i = 6 + 2i + 3 - i = 9 + i$$

2. Réponse b) .
Écrivons $Z = -1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.
Le module est $|Z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$
Si ϕ est un argument de Z, on vérifie $\begin{cases} \cos\phi &= \dfrac{-1}{2} \\ \sin\phi &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \phi = \dfrac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$
D'après le cours : $\arg\left(\dfrac{Z}{z}\right) = \arg(Z) - \arg(z) = \dfrac{2\pi}{3} - \theta$

3. Réponse c) .
On sait que $AM = |z_M - z_A| = |z-1|$ et $BM = |z_M - z_B| = |z-(-i)| = |z+i|$
L'ensemble cherché est donc l'ensemble des points M qui vérifient $MA = MB$, c'est-à-dire la médiatrice du segment [AB]

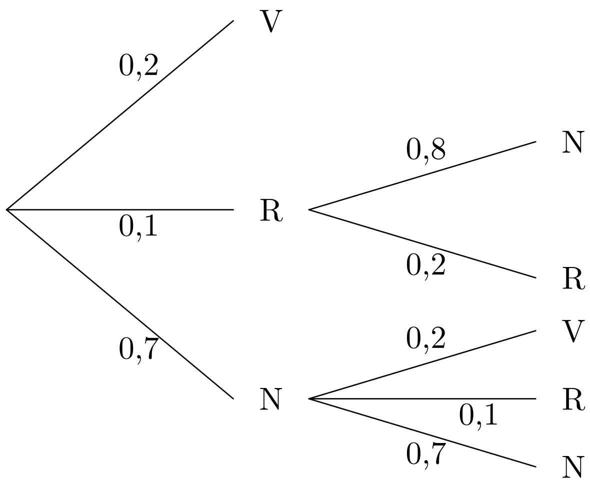
4. Réponse b) .
Calculons la partie réelle et la partie imaginaire de $Z = \dfrac{z+i}{z+1}$ en fonction de x et y :
$$\begin{aligned} Z = \frac{(x+iy)+i}{(x+iy)+1} &= \frac{x+i(y+1)}{(x+1)+iy} = \frac{x+i(y+1)}{(x+1)+iy} \cdot \frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy} \\ &= \frac{[x(x+1)+(y+1)] + i\,[(y+1)(x+1)-xy]}{(x+1)^2+y^2} \\ &= \frac{x^2+y^2+x+y}{(x+1)^2+y^2} + i\,\frac{x+y+1}{(x+1)^2+y^2} \end{aligned}$$
Par conséquent, si Z est un imaginaire pur, sa partie réelle doit s'annuler et les coordonnées du point M doivent vérifier :
$$x^2 + y^2 + x + y \iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

5. Réponse c) .
Pour tout $z \neq 3$, cette équation est équivalente à :
$$z - 8 = z(z-3) \iff z^2 - 4z + 8 = 0$$
On vérifie ensuite que le discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 8 = -16 = (4i)^2$
L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées
$$z_1 = \frac{4-4i}{2} = 2 - 2i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \overline{z_1} = 2 + 2i$$

EXERCICE 2

1. On a directement $P(N_1) = 0,7$ et $P_{N_1}(R_2) = 0,1$ par lecture du texte.
On en déduit $P(N_1 \cap R_2) = P(N_1)\, P_{N_1}(R_2) = 0,07$.

2.



3. On peut écrire $E = R_1 \cap R_2$ et donc $p(E) = p(R_1)\, p_{R_1}(R_2) = \boxed{0{,}02}$
L'événement F est la réunion disjointe des événements $R_1 \cap N_2$ et $N_1 \cap R_2$:

$$\begin{aligned} p(F) &= p(R_1 \cap N_2) + p(N_1 \cap R_2) \\ &= p(R_1)\, p_{R_1}(N_2) + p(N_1)\, p_{N_1}(R_2) \\ &= 0,1 \times 0,8 + 0,7 \times 0,1 = \boxed{0{,}15} \end{aligned}$$

4. a) On applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(R_2) &= p(R_1 \cap R_2) + p(N_1 \cap R_2) \\ &= P(R_1)\, P_{R_1}(R_2) + P(N_1)\, P_{N_1}(R_2) \\ &= 0,1 \times 0,2 + 0,7 \times 0,1 \\ &= 0,02 + 0,07 = \boxed{0{,}09} \end{aligned}$$

b) Par définition $p_{R_2}(N_1) = \dfrac{p(R_2 \cap N_1)}{p(R_2)} = \dfrac{7}{9}$

5. a) Le gain algébrique du joueur est la différence entre le gain et la somme qu'il a misée.
Les valeurs prises par la variable aléatoire X sont donc 9 , 1 et -1 .
D'après l'étude précédente, $p(X = 9) = p(E) = 0,02$ et $p(X = 1) = p(F) = 0,15$. On en déduit $p(X = -1) = 1 - p(X = 9) - p(X = 1) = 0,83$
On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i	9	1	-1
p_i	0,02	0,15	0,83

b) Par définition $E(X) = 9 \times 0,02 + 1 \times 0,15 - 1 \times 0,83 = -0,5$
Le jeu est défavorable au joueur puisqu'il perd en moyenne 0,5€ à chaque partie.

6. a) On répète la même expérience en supposant les résultats indépendants.
Si on appelle *succès* le fait de lancer la roue B au second lancer, la variable aléatoire Y qui est égale au nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et $p(R_1) = 0,1$.
On veut calculer $p(Y \geq 1)$. On sait que l'événement contraire est $(Y = 0)$ et que sa probabilité est

$$p(Y = 0) = \binom{n}{0} 0,1^0 0,9^n = 0,9^n$$

On en déduit $p_n = 1 - 0,9^n$.

b) Sachant $-1 < 0,9 < 1$ on peut écrire $\lim 0,9^n = 0$ et par somme $\lim p_n = \boxed{1}$
La suite (p_n) est donc convergente.

c) On résout :

$$\begin{aligned} p_n \geq 0,99 &\iff 1 - 0,9^n \geq 0,9 \\ &\iff 0,1 \geq 0,9^n \\ &\iff \ln 0,1 \geq n \ln 0,9 \end{aligned}$$

En divisant les deux membres par $\ln 0,9 < 0$, on obtient $n \geq \dfrac{\ln 0,1}{\ln 0,9} \approx 21,85$

La plus petite valeur de n telle que $p_n \geq 0,99$ est donc $\boxed{22}$.

EXERCICE 3

1. D'après le cours $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$. On en déduit par somme $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1$
Sachant $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on obtient par produit puis par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2. Posons $u(x) = x$ et $u'(x) = 1$ puis $v(x) = \ln x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$
On obtient en appliquant la formule de dérivation d'un produit :

$$g'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

On étudie maintenant le signe de cette dérivée :

$$\begin{cases} g'(x) = 0 & \iff \ln x = -1 & \iff x = e^{-1} \\ g'(x) > 0 & \iff \ln x > -1 & \iff x > e^{-1} \\ g'(x) < 0 & \iff \ln x < -1 & \iff x < e^{-1} \end{cases}$$

On en déduit le tableau de variations de g

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|\|$ -1	$\searrow$	$-1-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left]0\,;e^{-1}\right]$: l'intervalle image est donc $\left[-1-e^{-1}\,;-1\right[$
Cet intervalle ne contenant pas 0, l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\left]0\,;e^{-1}\right]$
La fonction g est continue et strictement croissante sur $\left]e^{-1}\,;+\infty\right[$: l'intervalle image est donc $\left]-1-e^{-1}\,;+\infty\right[$
Cet intervalle contenant 0, l'équation $g(x) = 0$ a une solution α et une seule dans $\left]e^{-1}\,;+\infty\right[$.
On vérifie enfin $g(1,7) \approx -0,1 < 0$ et $g(1,8) \approx 0,06 > 0$, ce qui implique $\boxed{1,7 < \alpha < 1,8}$

4. On a montré dans la question précédente que si $x \in \left]-1-e^{-1}\,;-1\right]$, alors $g(x) < 0$
Par ailleurs, puisque g est strictement croissante sur $\left]e^{-1}\,;+\infty\right[$, on peut écrire :

$$\begin{cases} e^{-1} < x < \alpha & \Longrightarrow g(x) < g(\alpha) = 0 \\ x = \alpha & \Longrightarrow g(x) = g(\alpha) = 0 \\ \alpha < x & \Longrightarrow 0 = g(\alpha) < g(x) \end{cases}$$

5. L'abscisse du point d'intersection des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est solution de l'équation $\dfrac{1}{x} = \ln x$
Puisque $x > 0$, cett équation est équivalente à $1 = x\ln x$ donc à $g(x) = 0$
D'après l'étude précédente, il y a un point d'intersection A et un seul d'abscisse α et d'ordonnée $\dfrac{1}{\alpha} = \ln\alpha$

Partie B

1. D'après le cours $\lim\limits_{x\to 0} e^{-x} = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.
On en déduit par produit puis par somme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$
La courbe de f admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 0$ (ou encore l'axe des ordonnées)
On vérifie de façon immédiate que pour $x > 0$: $\dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{e^x} - 1 = \dfrac{\ln x}{e^x} - 1 = f(x)$

Par application du cours (théorèmes sur la croissance comparée)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$

La courbe de f admet pour asymptote horizontale la droite d'équation $y = -1$

2. Posons $u(x) = e^{-x}$ et $u'(x) = -e^{-x}$ puis $v(x) = \ln x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$

On obtient en appliquant la formule de dérivation d'un produit :

$$f'(x) = -e^{-x} \times \ln x + e^{-x} \times \frac{1}{x} = \frac{-e^{-x}x\ln x + e^{-x}}{x} = \frac{-e^{-x}g(x)}{x}$$

Puisque l'exponentielle est strictement positive et puisque $x > 0$, cette dérivée est du signe de $-g(x)$. L'étude ayant été faite dans la **partie A**, on peut reporter les résultats et construire le tableau de variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘	-1

3. On a vu dans la **partie A** que $\dfrac{1}{\alpha} = \ln\alpha$. Ceci implique :

$$f(\alpha) = e^{-\alpha}\ln\alpha - 1 = \frac{1}{\alpha e^{\alpha}} - 1$$

4. Figure

5. Puisque les deux points ont la même abscisse, la distance entre ces points est :

$$AB = y_A - y_B = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha e^{\alpha}} + 1 = 1 + \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha}$$

On a montré que $\alpha > 1,7$, ce qui implique $\alpha > 0$ et donc $e^{\alpha} > 1$

On en déduit $AB - 1 = \dfrac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} > 0$ et donc finalement $\boxed{AB > 1}$

EXERCICE 4

1. On vérifie d'abord que $s_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$
Supposons que pour un certain entier n on ait vérifié $s_n = 1$. Alors
$$s_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{b_n}{2} + \frac{2a_n}{3} + \frac{b_n}{2} = a_n + b_n = s_n = 1$$
On a donc pour tout n : $\boxed{s_n = 1}$

2. On sait que pour tout n : $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3} + \dfrac{b_n}{2}$
En remplaçant b_n par $1 - a_n$, on obtient :
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{1 - a_n}{2} = \frac{-a_n}{6} + \frac{1}{2}$$

3. Tableau numérique :

n	0	1	2	3	4
valeur affichée de a	0,417	0,431	0,428	0,429	0,429

La suite paraît converger vers un réel approximativement égal à 0,429 .

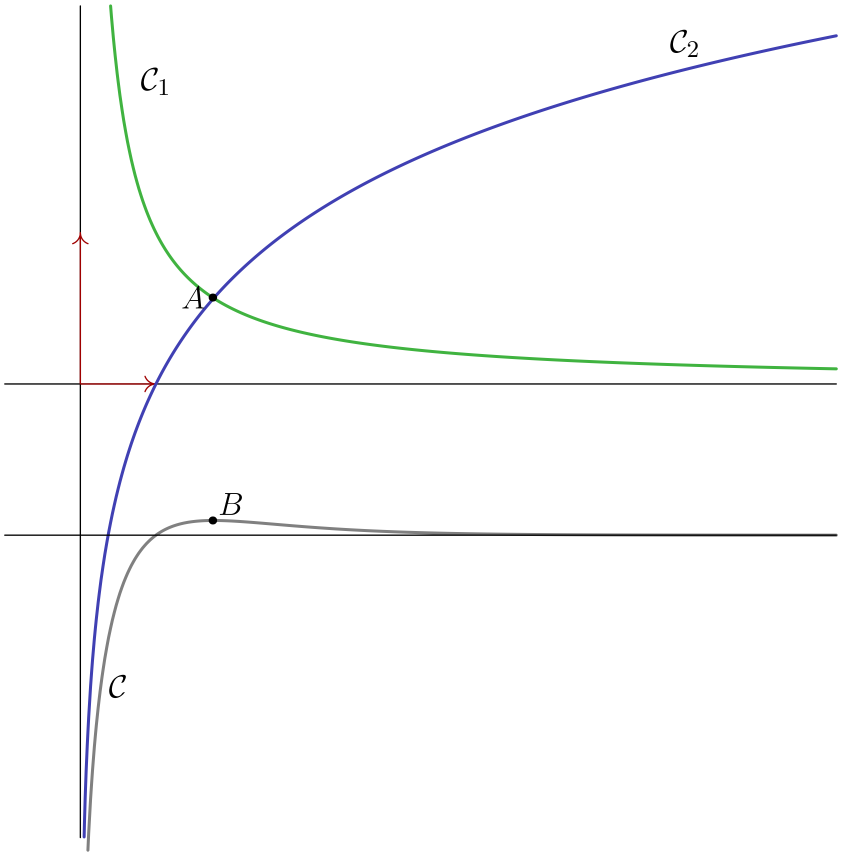
4. a) On calcule u_{n+1} en fonction de u_n :
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - \frac{3}{7} \\ &= \frac{-a_n}{6} + \frac{1}{2} - \frac{3}{7} \\ &= \frac{-a_n}{6} + \frac{1}{14} \\ &= \frac{-1}{6}\left(a_n - \frac{6}{14}\right) \\ &= \frac{-1}{6}\left(a_n - \frac{3}{7}\right) \\ &= \frac{-1}{6}\, u_n \end{aligned}$$
La suite (u_n) est donc géométrique.

b) Le premier terme est $u_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{7} = \dfrac{1}{14}$ et la raison est $q = \dfrac{-1}{6}$

c) On sait que pour tout entier n, on a : $u_n = u_0\, q^n$, ce qui implique $u_n = \dfrac{1}{14} \cdot \left(\dfrac{-1}{6}\right)^n$

5. Sachant $-1 < \dfrac{-1}{6} < 1$, on obtient $\lim \left(\dfrac{-1}{6}\right)^n = 0$ et on en déduit (par produit) $\lim u_n = 0$
Enfin $a_n = u_n + \dfrac{3}{7}$ entraîne $\lim a_n = \ell = \dfrac{3}{7}$

ANNEXE (EXERCICE 1)



Représentation des courbes $\mathcal{C}_1 : y = \dfrac{1}{x}$ et $\mathcal{C}_2 : y = \ln x$

Unités : 1cm en abscisse et 2cm en ordonnée .