EXERCICE 1 (4 points)

Pour chaque question de cet exercice, plusieurs réponses sont proposées. Parmi elles, une seule est exacte. Le candidat devra choisir l'une des réponses et justifier son choix.

1. Une solution de l'équation $2\,\overline{z} + z = 9 + i$ est :

(a) 3 **(b)** $3 - i$ **(c)** $3 + i$

2. Soit z le nombre complexe de forme exponentielle $z = r\,e^{i\theta}$ avec r réel strictement positif et $\theta \in [0\,;2\pi[$.

Un argument de $\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{z}$ est :

(a) $\dfrac{-\pi}{3} - \theta$ **(b)** $\dfrac{2\pi}{3} - \theta$ **(c)** $\dfrac{2\pi}{3} + \theta$

3. Soient A et B les points d'affixes respectives 1 et $-i$.

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 1| = |z + i|$ est :

(a) la droite (AB)

(b) le cercle de diamètre [AB]

(c) la médiatrice du segment [AB]

4. Les points M d'affixe $z = x + iy$, avec x et y réels, vérifiant $\dfrac{z + i}{z + 1}$ imaginaire pur sont sur :

(a) la droite d'équation $y = -x + 1$

(b) le cercle d'équation $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

(c) la médiatrice du segment [AB]

5. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z - 8}{z - 3} = z$ est :

(a) $\{2 + 2i\}$ **(b)** $\{-2 + 2i\}$ **(c)** $\{2 + 2i\,;2 - 2i\}$

EXERCICE 2 : (5 points)

Exercice réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Dans une kermesse, un organisateur de jeux dispose de deux roues de 10 cases chacune.

- la roue A comporte 2 cases vertes, 1 case rouge et 7 cases noires.
- la roue B comporte 8 cases noires et 2 rouges.

Le déroulement du jeu est le suivant . Le joueur lance la roue A :

- s'il tombe sur une case verte , le jeu s'arrête.
- s'il tombe sur une case rouge , alors il lance la roue B et note la couleur de la case.
- s'il tombe sur une case noire, il relance la roue A et note la couleur de la case .

On note :

V_1 , R_1 et N_1 les événements « tomber sur Vert, Rouge ou Noir » lors du premier lancer de roue

V_2 , R_2 et N_2 les événements « tomber sur Vert, Rouge ou Noir » lors du deuxième lancer

1. Déterminer $P(N_1)$, $P_{N_1}(R_2)$ et $P(N_1 \cap R_2)$.

2. Traduire l'énoncé par un arbre pondéré.

3. Calculer les probabilités des événements suivants :

E « les deux cases obtenues sont rouges »

F « une seule case est rouge »

4.
a) Justifier que $P(R_2) = \dfrac{9}{100}$

b) Sachant que la deuxième case est rouge, quelle est la probabilité que la première ait été noire ?

5. Si les deux cases sont rouges, le joueur gagne 10€, si une seule case est rouge, il gagne 2€, sinon il ne gagne rien.

Le joueur mise 1€.

Soit X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

6. Le joueur décide de faire n parties consécutives supposées indépendantes ($n \geq 2$).

a) Justifier que la probabilité qu'il lance au moins une fois la roue B au second lancer est $p_n = 1 - 0,9^n$.

b) Justifier que la suite (p_n) converge et calculer sa limite.

c) Déterminer la plus petite valeur de n telle que $p_n \geq 0,99$.

EXERCICE 3 : (6 points)

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}_1$ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ (pour $x > 0$) et la courbe $\mathcal{C}_2$ d'équation $y = \ln x$.
Les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tracées dans le graphique de l'annexe qui sera à compléter au fur et à mesure de l'exercice.

Partie A
On considère la fonction g définie sur $]0\,,+\infty[$ par $g(x) = x\ln x - 1$.

1. Étudier les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Calculer $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0\,,+\infty[$.
Déterminer un encadrement à 10^{-1} près de α.
4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
5. Montrer que les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ n'ont qu'un seul point d'intersection A .
Le placer sur le graphique de l'annexe et préciser ses coordonnées.

Partie B
On considère la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = e^{-x}\ln x - 1$.
Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Étudier les limites de g en 0 et en $+\infty$.
Que peut-on en déduire graphiquement pour la courbe de f ?
$\left(\textit{On pourra montrer que pour tout } x > 0 : f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{e^x} - 1\right)$
2. Montrer que pour tout $x \in\,]0\,,+\infty[\ : f'(x) = \dfrac{-e^{-x}g(x)}{x}$.
En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha e^{\alpha}} - 1$.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ de f dans le repère donné en annexe et placer le point B de cette courbe qui a pour abscisse α.
5. Montrer que $AB > 1$.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 4 : (5 points)

On considère dans cet exercice les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$a_0 = b_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et pour tout entier } n \qquad \begin{cases} a_{n+1} &= \dfrac{a_n}{3} + \dfrac{b_n}{2} \\ b_{n+1} &= \dfrac{2a_n}{3} + \dfrac{b_n}{2} \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite (s_n) définie pour tout entier naturel par :

$$s_n = a_n + b_n$$

est constante et toujours égale à 1 .

2. Déduire de la question précédente que pour tout n : $a_{n+1} = \dfrac{-a_n}{6} + \dfrac{1}{2}$

3. Pour calculer les premiers termes de la suite (a_n), on utilise l'algorithme suivant:

```
VARIABLES
n et a sont des nombres
DÉBUT de l'algorithme
   a prend la valeur 1/2
   POUR n allant de 0 à 4
      a prend la valeur (3 − a)/6
      Afficher a
   FIN de la boucle POUR
FIN de l'algorithme
```

Reproduire et compléter le tableau suivant avec les valeurs affichées par cet algorithme (on pourra arrondir les résultats au millième) :

n	0	1	2	3	4
valeur affichée de a					

Quelle conjecture peut-on faire à propos de la limite de cette suite ?

4. Pour étudier le comportement de la suite (a_n) , on considère la suite auxiliaire (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = a_n - \dfrac{3}{7}$

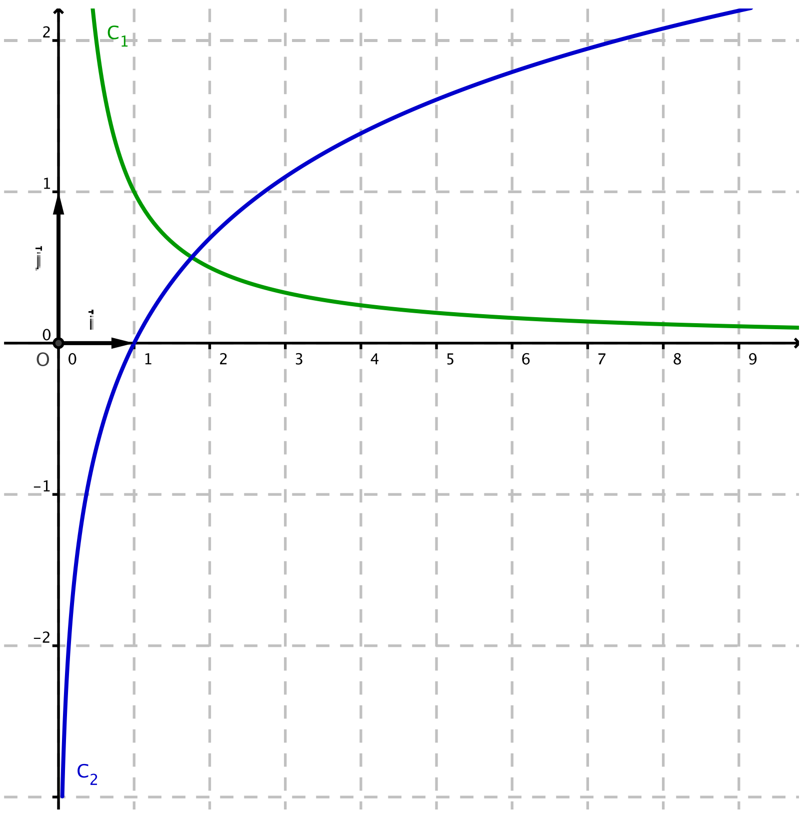
a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique

b) Préciser le premier terme et la raison de la suite (u_n)

c) En déduire que pour tout n on a : $u_n = \dfrac{1}{14} \cdot \left(\dfrac{-1}{6}\right)^n$

5. Déterminer la limite ℓ de la suite (a_n) .

ANNEXE (EXERCICE 1)
(à rendre avec la copie)



Représentation des courbes $\mathcal{C}_1 : y = \dfrac{1}{x}$ et $\mathcal{C}_2 : y = \ln x$

Unités : 1cm en abscisse et 2cm en ordonnée .