Sujets

↑ **Nouvelle-Calédonie mars 2012 . EXERCICE 2** →

On dispose de deux urnes et d'un dé bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire .
L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires .
Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé : si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1 , sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.
On considère les deux événements suivants :
A : « *obtenir 1 en lançant le dé* »
B : « *obtenir une boule noire* »

1. a) Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.

b) Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\dfrac{3}{8}$

c) Sachant que l'on a tiré une boule noire, quelle est la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé ?

2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire . Une personne joue dix parties indépendantes, en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

a) Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

b) Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

c) On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(X < k)$	0,009 1	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,992 2	0,999 0	0,999 9

Soit N un entier naturel non nul. On considère l'événement :
« *la personne gagne au moins N parties* »
À partir de quelle valeur de N cette probabilité est inférieure à $\dfrac{1}{10}$?

↑ **Amérique du Nord mai 2012 . EXERCICE 1** →

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30% des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Partie A

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :
F l'événement « *le membre choisi est une femme* »
T l'événement « *le membre choisi adhère à la section tennis* »

1. Montrer que la probabilité de l'événement F est égale à $\dfrac{2}{5}$

2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis : quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

Partie B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine un membre de l'association est choisi de manière indépendante pour tenir la loterie.

a) Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

b) Pour tout entier n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$

c) Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geq 0,99$

2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 € chacun, les autres ne rapportent rien.
Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit 20 € par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.
On note X le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

↑ **Antilles-Guyane juin 2012 . EXERCICE 4** →

Les questions sont indépendantes.

1. Dans un lycée donné, on sait que 55% des élèves sont des filles.
On sait également que 35% des filles et 30% des garçons déjeunent à la cantine.
On choisit, au hasard, un élève du lycée.
Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?

2. Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher.
On tire 3 jetons simultanément.
Combien de tirages différents peut-on faire contenant au moins un jeton à numéro pair?

3. Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\dfrac{1}{5}$.
Calculer la probabilité que Y soit supérieure ou égale à 2.
(*donner une valeur approchée du résultat à* 10^{-3})

4. Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
On appelle
A l'évènement « *l'appareil présente un défaut d'apparence* »
et F l'évènement « *l'appareil présente un défaut de fonctionnement* ».
On suppose que les évènements A et F sont indépendants.
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0,02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0,069.
On choisit au hasard un des appareils.
Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?

↑ **Nouvelle-Calédonie novembre 2012 . EXERCICE 2** →

On dispose d'une urne U contenant trois boules blanches et deux boules rouges indiscernables au toucher.

Partie A

On considère l'expérience suivante : on tire successivement trois fois de suite une boule de l'urne U, en remettant à chaque fois la boule dans l'urne.
On appelle X le nombre de fois où on a obtenu une boule rouge.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité d'avoir obtenu exactement une fois une boule rouge.

3. Déterminer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

Partie B

On procède maintenant à une nouvelle expérience :

- on tire une boule de l'urne U : si elle est rouge on s'arrête, sinon on la remet dans l'urne et on tire une boule à nouveau
- si cette deuxième boule est rouge, on s'arrête, sinon on la remet dans l'urne et on tire une boule pour la troisième fois

1. Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités.

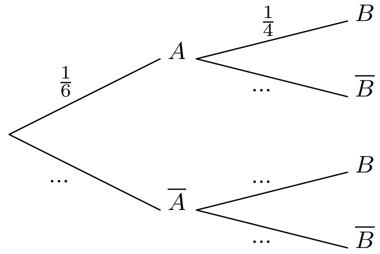
2. On appelle Y le nombre de boules rouges obtenues lors d'une expérience.
La variable aléatoire Y prend donc la valeur 1 si la dernière boule est rouge et 0 sinon.
Déterminer la loi de probabilité de Y et son espérance mathématique.

3. On appelle N le nombre de tirages effectués lors d'une expérience.
Déterminer la loi de probabilité de N et son espérance mathématique.

4. On appelle proportion moyenne de boules rouges le rapport de l'espérance du nombre de boules rouges obtenues sur l'espérance du nombre de tirages.
Montrer que la proportion moyenne de boules rouges dans l'expérience est la même que la proportion de boules rouges dans l'urne.

Nouvelle-Calédonie mars 2012 . EXERCICE 2

1. **a)** Examiner d'abord la réalisation de l'événement A et ensuite, selon que A ait été ou pas réalisé, examiner la réalisation de l'événement B



   b) Appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) \\ &= p(A) \cdot p_A(B) + p(\overline{A}) \cdot p_{\overline{A}}(B) \end{aligned}$$

   c) On demande de calculer $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

2. **a)** Préciser la loi suivie par X . Le résultat arrondi au millième est 0,236.

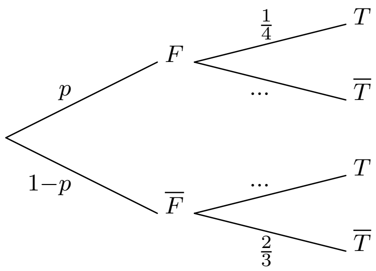
   b) $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$. Le résultat arrondi au millième est 0,991.

   c) Le tableau donne la probabilité que la personne gagne (strictement) moins de k parties, c'est-à-dire $p(X < k)$.
   Il suffit de rajouter une ligne au tableau et de calculer les probabilités des événements contraires, c'est-à-dire $p(X \geq k) = 1 - p(X < k)$.
   Ces probabilités décroissent et deviennent inférieure à $\dfrac{1}{10}$ à partir d'un certain rang.

Amérique du Nord mai 2012 . EXERCICE 1 ←

Partie A

1. Réaliser un arbre de probabilités en notant p la probabilité inconnue d'avoir choisi une femme.



On peut alors exprimer $P(T)$ en fonction de p en utilisant la formule des probabilités totales.
La valeur de p se calcule en résolvant l'équation $P(T) = \dfrac{3}{10}$

2. On demande de calculer $p_T(F) = \dfrac{p(F \cap T)}{p(F)}$

Partie B

1. a) On peut par exemple noter N la variable aléatoire égale au nombre d'adhérents à la section tennis qui ont été choisis au cours des quatre semaines consécutives : justifier que N suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
Montrer alors que $p(N = 2)$ est égal à 0,2646

b) Préciser la loi suivie par N lorsque l'étude porte sur n semaines consécutives.
En déduire $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

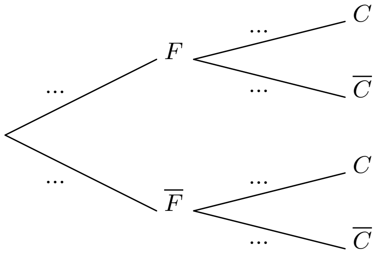
c) Montrer qu'on doit avoir $n \geq 13$

2. a) Montrer que le nombre total de tirages simultanés de deux jetons est 4950.
Décompter les tirages avec deux jetons gagnants (45) et calculer le gain algébrique correspondant.
Décompter les tirages avec aucun jeton gagnant et calculer le gain algébrique correspondant.
Examiner le dernier cas qui n'a pas été étudié.

b) Montrer que le joueur perd 1 € par partie.

Antilles-Guyane juin 2012 . EXERCICE 4 ←

1. On note :
  F : « *l'élève choisi est une fille* »
  C : « *l'élève choisi déjeune à la cantine* »
Construire un arbre de probabilités :



Caculer $p(\overline{C})$ en appliquant la formule des probabilités totales (le résultat est 0,6725)

2. Montrer qu'il y a 120 tirages possibles.
Montrer qu'il y a 10 tirages avec trois numéros impairs.
Conclure.

3. Calculer d'abord la probabilité de l'événement contraire. Le résultat arrondi est 0,931.

4. L'énoncé donne $p(A)$ et $p(A \cup F)$.
Il faut calculer $p(F)$: on peut par exemple appeler x cette probabilité inconnue.
Justifier $p(A \cap F) = 0,02\,x$
Calculer $p(A \cup F)$ en fonction de x
Montrer enfin que $x = 0,05$ en résolvant une équation.

Nouvelle-Calédonie novembre 2012 . EXERCICE 2 ←

PartieA

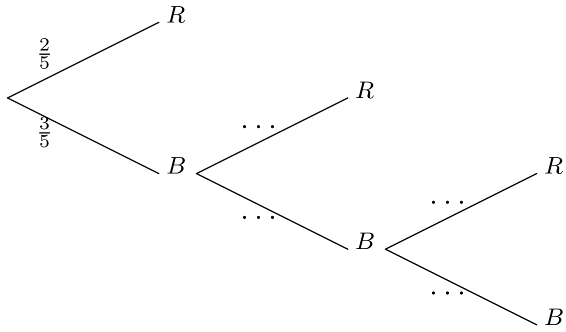
1. Reconnaître le schéma de Bernoulli et une variable aléatoire égale au nombre de « *succès* »

2. $p(X = 1) = \dfrac{54}{125}$

3. L'espérance est égale à 1,2

PartieB

1. L'arbre se développe en trois étapes correspondant aux trois tirages possibles.



2. Calculer $p(Y = 0)$ en utilisant l'arbre précédent : cet événement peut être noté BBB
En déduire $p(Y = 1)$: il n'y a pas d'autre cas possible.
Montrer pour finir que l'espérance est égale à $\dfrac{98}{125}$

3. La variable N a pour valeurs possibles 1, 2 ou 3.
Les événements correspondants peuvent être notés R , BR et BB : leur probabilité se calcule avec l'arbre de la première question.
L'espérance est égale à $\dfrac{49}{25}$

4. Calculer $\dfrac{E(Y)}{E(N)}$ et vérifier que ce rapport est bien égal à $\dfrac{2}{5}$

↑ # Formulaire

Probabilité

univers d'une expérience aléatoire	ensemble U des résultats élémentaires e
probabilité définie sur un univers	pour tout $e \in U : p(e) \in [0\,;1]$ et $\displaystyle\sum_{e\in U} p(e) = 1$
probabilité uniforme	pour tout $e \in U : p(e) = \dfrac{1}{\text{nombre d'éléments de } U}$

Événements

probabilité d'un événement	$p(\emptyset) = 0$ et $p(A) = \displaystyle\sum_{e\in A} p(e)$ lorsque $A \neq \emptyset$
probabilité dans le cas uniforme	$p(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } U}$
événement contraire	$p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$
probabilité de la réunion	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
événements incompatibles	$p(A \cap B) = 0$
probabilité conditionnelle	$p_A(B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$
événements indépendants	$p(A \cap B) = p(A)\,p(B)$ ou encore $p_A(B) = p(B) = p_{\overline{A}}(B)$
formule des probabilités totales	$p(B) = p(A\cap B) + p(\overline{A}\cap B)$ $= p(A)\,p_A(B) + p(\overline{A})\,p_{\overline{A}}(B)$

Variables aléatoires

loi de probabilité

x_i	...valeurs prises par X ...
$p_i = p(X = x_i)$	probabilités des événements associés

espérance	$E(X) = \displaystyle\sum_i p_i\, x_i$
variance	$V(X) = \displaystyle\sum_i p_i\, [x_i - E(X)]^2$ $= E(X^2) - E(X)^2 = \displaystyle\sum_i p_i\, x_i^2 - E(X)^2$
écart-type	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Loi binomiale

schéma de Bernoulli	expérience répétée n fois, les résultats étant indépendants
succès	événement particulier de probabilité p, l'événement contraire ou *échec* étant de probabilité $q = 1 - p$
nombre de *succès*	dans le cas du schéma de Bernoulli, si X est égale au nombre de succès, X suit la loi $\mathfrak{B}(n\,,p)$ $p(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$ pour tout $0 \leq k \leq n$
paramètres de la loi binomiale	$E(X) = n\,p$, $V(X) = n\,p\,q$, $\sigma(X) = \sqrt{n\,p\,q}$

Nombre de tirages de p éléments dans un ensemble qui a n éléments

tirages successifs *avec remise*	$n \times n \times \ldots \times n = n^p$
tirages successifs *sans remise*	$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = n^p$
tirages *simultanés*	$\binom{n}{p}$