Sujets

mai 2011 **Amérique du Nord**

novembre 2011 **Nouvelle-Calédonie**

mai 2012 **BTS Métopole (B1)**

mai 2013 **BTS Métropole (D)**

↓ Formulaire

↑ **Amérique du Nord mai 2011 . EXERCICE 2** →

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.
On choisi au hasard deux ordinateurs de cette salle.
Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années est

$$p(X \leq t) = \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda\, x} \mathrm{d}x$$

1. Déterminer λ sachant $p(X > 5) = 0,4$.

2. On prendra dans cette question $\lambda = 0,18$.
Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 dernières années, quelle est, à 10^{-3} près et que la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.

a) On considère un lot de 10 ordinateurs .
Quelle est la probabilité que dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? (*on donnera une valeur arrondie au millième*)

b) Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'événement

« *l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans* »

soit supérieure à 0,999 ?

↑ **novembre 2011 Nouvelle-Calédonie . EXERCICE 3** →

Dans une grande entreprise qui dispose d'un vaste réseau informatique, on observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps est appelé *temps de fonctionnement*.
Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement exprimé en heures.
On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Le paramètre λ est un réel strictement positif .

On rappelle que pour tout réel $t \geq 0$, $p(X \leq t) = \displaystyle\int_0^t \lambda\, e^{-\lambda\, x} \mathrm{d}x$.

1. On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à 0,6.
Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est 0,131 .

Dans les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,131$ et on arrondira les résultats à 10^{-2}.

2. Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0,52 .

3. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des 4 premières heures.

4. Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.

5. On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement qu'on suppose indépendants.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs à 5 heures.

a) Quelle est la loi suivie par Y ?

b) Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs à 5 heures.

c) Calculer l'espérance de Y (*on arrondira le résultat à l'entier le plus proche*) .

↑ BTS Métropole (B1) mai 2012 . EXERCICE 2 →

Un particulier souhaite acheter, auprès d'un producteur, des bottes de paille pour l'isolation de sa maison.
Les résultats seront arrondis au centième.

Partie A

On prélève une botte de paille au hasard dans la production.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque botte ainsi prélevée, associe son épaisseur exprimée en mm. On admet que X suit une loi normale de moyenne 360 et d'écart-type 18.
Calculer la probabilité $p(350 \leq X \leq 370)$.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque botte ainsi prélevée, associe sa densite exprimée en kg/mm^3. On admet que Y suit une loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 5.
Calculer la probabilité qu'une botte de paille prélevée dans la production ait une densité comprise entre 90 kg/mm^3 et 110 kg/mm^3 .

3. On admet que les variables X et Y sont indépendantes.
Une botte de paille est conforme aux normes d'isolation si son épaisseur, exprimée en mm, est dans l'intervalle $[350\,;370]$ et si sa densité, exprimée en kg/mm^3, est dans l'intervalle $[90\,;110]$.
Calculer la probabilité qu'une botte de paille prélevée dans la production soit conforme aux normes d'isolation.

Partie B

On note E l'événement
« *une botte prélevée dans la production est conforme aux normes d'isolation* »
et on admettra que $p(E) = 0,4$.
On prélève 5 bottes en assimilant ce prélèvement à un tirage sans remise. On note Z la variable aléatoire qui est égale au nombre de bottes de paille conformes dans ce prélévement.

1. Justifier que Z suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Quelle est la probabilité que toutes les bottes prélevées soient conformes ?

3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins quatre bottes de paille qui soient conformes ?

Partie C

On effectue dans cette partie un prélèvement de 100 bottes de paille dans la production. De nouveau ce prélèvement est assimilé à un tirage sans remise.
On constate que dans cet échantillon, il y a 37 bottes de paille qui sont conformes .

1. Donner une estimation de la fréquence p des bottes de paille conformes dans la production.

2. Déterminer un intervalle de confiance de cette fréquence p au niveau 95% .

↑ **BTS Métropole (D) mai 2013 . EXERCICE 2** →

Une entreprise découpe en grande quantité des tubes pour le montage de remontées mécaniques.
La longueur des tubes est exprimée en millimètres.
Un tube est dit *conforme* lorsque sa longueur est dans l'intervalle $[245\,;255]$.

Les résultats seront arrondis au centième.

Partie B

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque tube pris au hasard dans la production, associe sa longueur.

1. Après un premier réglage de la machine, on admet que la variable Y suit une loi normale de moyenne $\mu = 250$ et d'écart-type $\sigma = 3$.
Calculer la probabilité qu'un tube pris au hasard dans la production soit conforme.

2. Le résultat précédent n'étant pas satisfaisant, on veut modifier le réglage de la machine.
Pour cela on doit déterminer une nouvelle valeur de l'écart-type.
On suppose donc que Y suit une loi normale de moyenne $\mu = 250$ et d'écart-type σ.
Déterminer σ pour que $p(245 \leq Y \leq 255) = 0,97$.

Partie C

On admet dorénavant que la proportion de tubes qui ne sont pas conformes est de 3%.
On prélève 50 tubes en assimilant ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note Z la variable aléatoire égale au nombre de tubes non conformes.

1. Quelle est la loi suivie par Z ? Préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité de n'avoir aucun tube non conforme dans ce prélèvement.
En déduire la probabilité d'avoir au moins un tube non conforme dans ce prélèvement.

Amérique du Nord mai 2011 . EXERCICE 2 ←

Partie A

Calculer le nombre de façons de choisir 2 ordinateurs parmi les 25 ordinateurs disponibles.
Calculer ensuite le nombre de façons de choisir 2 ordinateurs défectueux parmi les 3 ordinateurs défectueux de cette salle.
Le résultat final est 0,01 .

Partie B

1. Montrer qu'il s'agit de résoudre $e^{-5\lambda} = 0,4$

2. Calculer $p_{(X>3)}(X > 5)$: le résultat final est 0,698 .

3. a) Justifier que le nombre d'ordinateurs qui ont une durée de vie supérieure à 5 ans suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
Montrer que le résultat est 0,994 .

b) Par le même raisonnement que celui de la question précédente, montrer qu'il s'agit de résoudre $1 - 0,6^n > 0,999$

novembre 2011 Nouvelle-Calédonie . EXERCICE 3 ←

1. Montrer qu'il s'agit de résoudre $e^{-7\lambda} = 0,4$

2. Justifier le résultat en reproduisant le calcul du cours.

3. On peut utiliser le fait qu'il s'agit d'une loi sans vieillissement ou reproduire le raisonnement.

4. Environ 0,19 .

5. **a)** Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Environ 0,20 (à justifier)

c) Environ 4 (à justifier)

BTS Métropole (B1) mai 2012 . EXERCICE 2

←

Partie A

1. Par hypothèse $T = \dfrac{X - 360}{18}$ suit la loi centrée réduite. Le résultat est 0,42.

2. Même raisonnement avec $T = \dfrac{X - 100}{5}$. Le résultat est 0,95 .

3. Justifier qu'il s'agit de calculer le produit des deux probabilités précédentes.

Partie B

1. On a dans cette partie 5 tirages indépendants et une probabilité du succès égale à $0,4$

2. Vérifier que le résultat est $0,01$

3. Vérifier que le résultat est $0,09$

Partie C

(Remarque : les valeurs numériques de l'énoncé original ont été adaptées)

1. Une estimation de p est la fréquence f observée dans l'échantillon : calculer f .

2. Vérifier que $[0,27\,;0,47]$ convient.

BTS Métropole (D) mai 2013 . EXERCICE 2 ←

Partie B

1. Vérifier que $p(245 \leq Y \leq 255) = 0,91$

2. Montrer qu'il s'agit de résoudre $p\left(\dfrac{-5}{\sigma} \leq T \leq \dfrac{5}{\sigma}\right) = 0,97$ où T suit la loi normale centrée réduite. Vérifier $\sigma \approx 2,3$.

Partie C

1. Loi binomiale.

2. Vérifier $p(Z = 0) = 0,22$ et $p(Z \geq 1) = 0,78$.

↑ FORMULAIRE

Densité

densité de probabilité	fonction f continue et positive sur un intervalle I et telle que l'aire sous la courbe vaut 1 : $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
probabilité d'un intervalle	$\mathrm{P}([a\,;b]) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (même résultat pour $[a\,;b[$, $]a\,;b]$ et $]a\,;b[$) $\mathrm{P}([a\,;+\infty[) = \lim\limits_{K\to+\infty} \int_a^K f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{P}(\mathbb{R}) = \lim\limits_{K\to+\infty} \int_{-K}^K f(x)\,\mathrm{d}x$
variable aléatoire	X suit la loi de densité f lorsque $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \mathrm{P}([a\,;b])$
espérance	$E(X) = \int_I x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$

Loi uniforme

densité	la densité est constante sur $[a\,;b]$: $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$
variable suivant une loi uniforme	pour u et $v \in [a\,;b]$: $\mathrm{P}(u \leq X \leq v) = \dfrac{v-u}{b-a}$
espérance	$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

Loi exponentielle

densité	la densité est définie sur sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda\, x}$
variable suivant une loi exponentielle	$\mathrm{P}(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda\, a}$ $\quad$ $\mathrm{P}(X > a) = e^{-\lambda\, a}$
loi de durée de vie *sans vieillissement*	$\mathrm{P}_{(X>t)}(X > t+s) = e^{-\lambda\, s}$ est indépendant de t
espérance	$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Loi normale centrée réduite

densité	la densité est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$.
variable suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$	les probabilités se calculent avec la calculatrice
paramètres	$E(X) = 0 \quad V(X) = 1 \quad \sigma(X) = 1$

Loi normale

variable suivant la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	on utilise le fait que $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ les probabilités se calculent avec la calculatrice
paramètres	$E(X) = \mu \quad V(X) = \sigma^2 \quad \sigma(X) = \sigma$

Approximation d'une loi binomiale

	on suppose que X suit la loi $\mathcal{B}(n\,,p)$ et que Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$
rappel des paramètres	$\mu = np$, $V = npq$ et $\sigma = \sqrt{npq}$ en posant $q = 1-p$
application de Moivre-Laplace	pour $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $nq \geq 5$: $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) \approx \mathrm{P}\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \dfrac{b-\mu}{\sigma}\right)$
fluctuation de la fréquence du succès	si $f = \dfrac{X}{n}$ est la fréquence du *succès* à l'issue des n essais :
intervalle de fluctuations asymptotique à 95% de la fréquence	$\mathrm{IF} = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ $\mathrm{P}(f \in \mathrm{IF}) \to 0,95$
intervalle simplifié de fluctuations asymptotique à 95% de la fréquence	$\mathrm{IS} = \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ $\mathrm{P}(f \in \mathrm{IS}) > 0,95$ pour n suffisamment grand
estimation d'un paramètre	dans le cas où on connaît f et on ignore p :
intervalle de confiance au niveau 95%	$\mathrm{IC} = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ $\mathrm{P}(p \in \mathrm{IC}) > 0,95$ pour n suffisamment grand