Sujets

↓ Formulaire

↑ **Antilles-Guyane septembre 2011 Exercice 1** →

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x - 1$

Partie A

1. Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$

2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
En déduire le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique que l'on notera α.
Donner un encadrement de α au centième.

4. Déterminer le signe de $f(x)$ lorsque $x \in]0\,;+\infty[$

5. Montrer que $\ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$

Partie B

On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé. On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_\alpha^4 f(x)\,dx$$

1. Justifier que l'intégrale I est l'aire d'un domaine du plan que l'on hachurera sur le document donné en annexe.

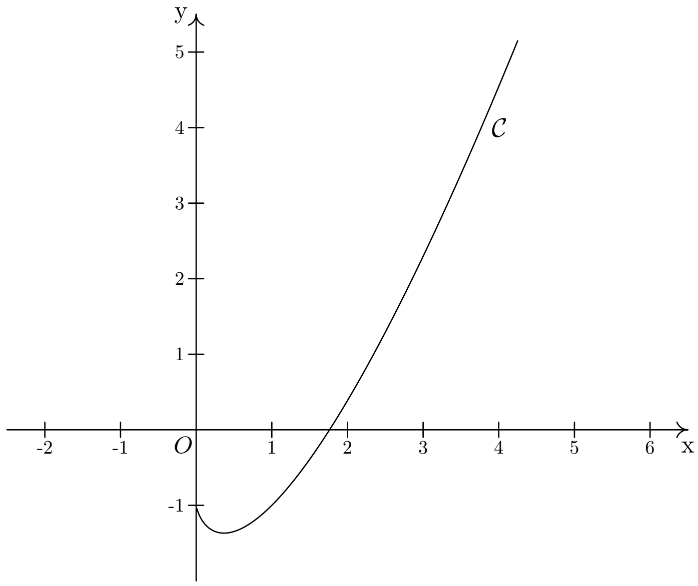
2. Montrer que la fonction définie pour tout $x > 0$ par

$$F(x) = \frac{x^2\,\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} - x$$

est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$

3. En déduire l'égalité $I = \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\alpha}{2} + 16\ln 2 - 8$.
Donner une valeur approchée de I au dixième.

<u>Figure</u>



↑ **Pondichéry avril 2011 Exercice 1** →

Partie II

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Étudier les variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

3. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$F(x) = x\ln x - \ln x$$

est une primitive de f.

5. Démontrer que F est strictement croissante sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

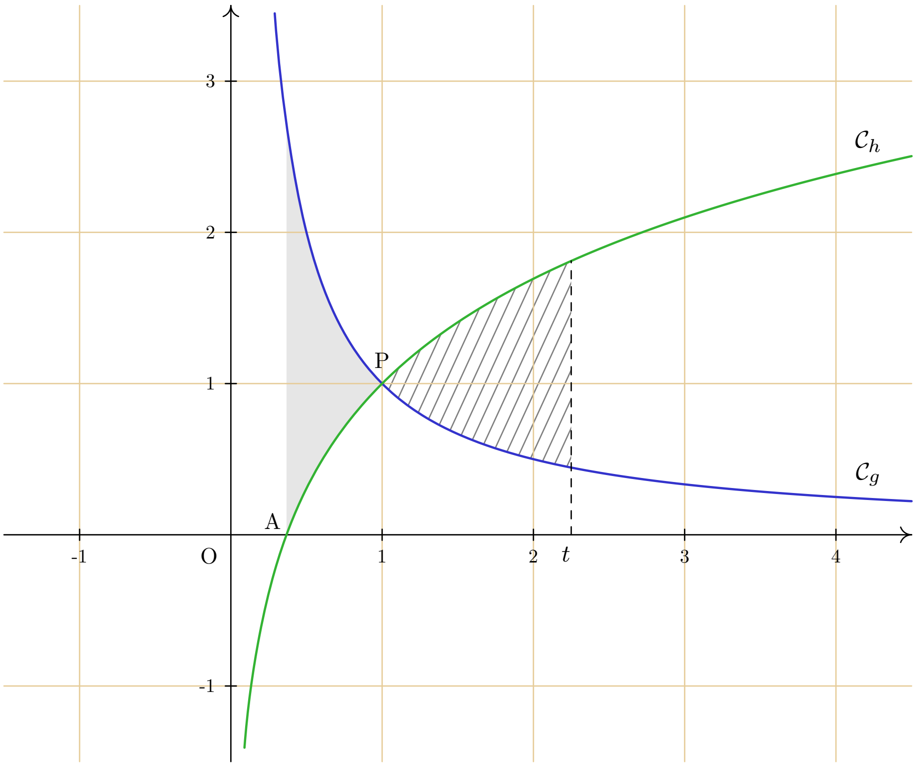
6. Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \dfrac{1}{e}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$ que l'on notera α.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Partie III

Soient g et h les fonctions définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \ln x + 1$$

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ représentatives des fonctions g et h.



1. Déterminer les coordonnées du point A, point d'intersection de $\mathcal{C}_h$ avec l'axe des abscisses.

2. Le point P est le point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ et de $\mathcal{C}_h$: montrer que les coordonnées du point P sont $(1\,;1)$.

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ et par les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = 1$ (*ce domaine est grisé sur le graphique*) .

a) Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de la fonction f définie dans la partie précédente.

b) Montrer que $\mathcal{A} = 1 - \dfrac{1}{e}$

4. Soit t un nombre réel de l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
On note $\mathcal{B}_t$ l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ et par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = t$ (*ce domaine est hachuré sur le graphique*) .
On souhaite déterminer une valeur de t telle que $\mathcal{A} = \mathcal{B}_t$.

a) Montrer que $\mathcal{B}_t = t\ln t - \ln t$

b) Conclure

↑ **Métropole juin 2011 Exercice 3** →

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^n e^{-x}$$

On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,,\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$.

On désigne enfin par (I_n) la suite définie par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

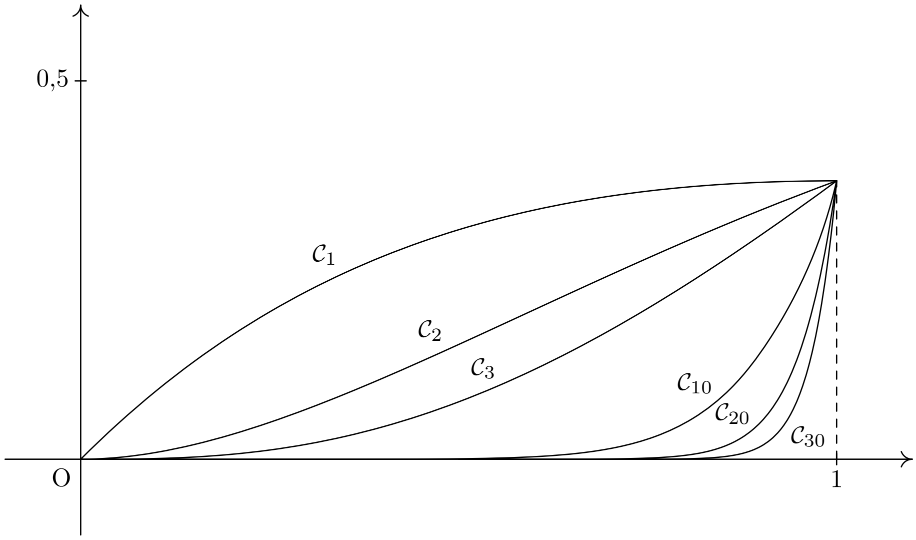
1. On veut dans cette question calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x e^{-x}\,\mathrm{d}x$

a) Soit F la fonction définie par $F(x) = (-x+k)e^{-x}$ où k est une constante.
Calculer $F'(x)$

b) Pour quelle valeur de k l'égalité $F'(x) = xe^{-x}$ est vérifiée quel que soit le réel x ?

c) En déduire une primitive de f_1 et démontrer $I_1 = 1 - \dfrac{2}{e}$

2. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_{10}$, $\mathcal{C}_{20}$, $\mathcal{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leq x \leq 1$.



a) Proposer une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en la justifiant graphiquement.

b) Démontrer la conjecture proposée.

c) Démontrer que la suite (I_n) est positive. En déduire qu'elle est convergente.

d) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

↑ **Antilles-Guyane juin 2012 Exercice 1** →

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{x-1} + 1$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A

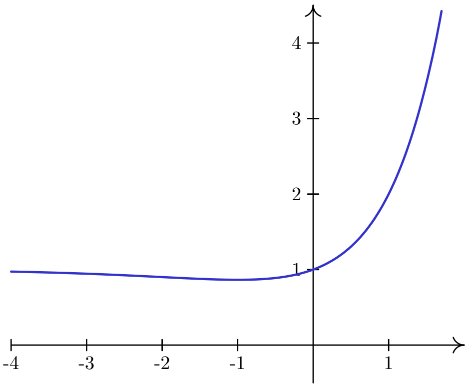
1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$

3. Démontrer que pour tout x réel, on a : $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.

4. Étudier les variations de f .

Partie B
On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f.



1. Reproduire le schéma et représenter la droite Δ d'équation $y = 2x$. On admet dans la suite que la courbe $\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de la droite Δ.
Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite Δ, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

2. On veut calculer dans cette question $I = \displaystyle\int_0^1 \left(xe^{x-1} + 1\right)\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que $F(x) = (x-1)e^{x-1} + x$ est une primitive de f

b) En déduire I

3. Quelle est l'aire du domaine $\mathcal{D}$?

Antilles-Guyane septembre 2011 Exercice 1

←

Partie A

1. Utiliser les résultats sur la « *croissance comparée* » en 0

2. La fonction f admet un minimum pour $x = e^{-1}$

3. Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à chacun des deux intervalles où f est monotone.
Procéder ensuite par balayage pour encadrer α .

4. Le signe de $f(x)$ se déduit des variations de f et du fait que $f(\alpha) = 0$

5. Il suffit d'écrire que $f(\alpha) = 0$ et de transformer cette égalité.

Partie B

1. Il suffit de vérifier d'une part que $\alpha < 4$ et d'autre part que la fonction est positive sur l'intervalle considéré pour que l'intégrale mesure l'aire sous la courbe.

2. Vérifier que la dérivée de F est f .

3. Calculer $F(4) - F(\alpha)$ et simplifier l'expression obtenue en utilisant $\ln \alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.
L'encadrement trouvé en **A 3.** conduit à $I \approx 4,8$

Pondichéry avril 2011 Exercice 1 ←

Partie II

1. Les limites sont $-\infty$ et $+\infty$ (aucune indétermination)

2. Vérifier que $f'(x)$ est la somme de deux termes strictement positifs.
En déduire les variations de f.

3. Montrer que f s'annule pour $x = 1$.
Le signe de $f(x)$ se déduit alors des variations de f.

4. Montrer que la dérivée de F est f.

5. Le signe de $F' = f$ a été étudié question **3** : les variations de F en découlent.

6. Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à l'intervalle $]1\,;+\infty[$.
Montrer par balayage que $1,9 < \alpha < 2$.

Partie III

1. Résoudre $h(x) = 0$ et montrer que $\mathrm{A}(e^{-1}\,;0)$

2. Montrer que l'équation $g(x) = h(x)$ est équivalente à $f(x) = 0$: le signe de f (qui a été étudié dans la partie précédente) donne la réponse.

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ et par les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = 1$.

a) Indiquer laquelle des deux courbes, est au-dessus de l'autre sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{e}\,;1\right]$
Selon la réponse à cette question, on a le choix entre
$$\int_{e^{-1}}^{1}[g(x) - h(x)]\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{e^{-1}}^{1}[h(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$
L'une de ces deux différences est $f(x)$, alors que l'autre est $-f(x)$: reste à trouver celle qui convient.

b) Une primitive de $-f$ est $-F$ et donc $\mathcal{A} = [-F(x)]_{e^{-1}}^{1}$ ce qui conduit au résultat.

4. a) Comme dans la question précédente, il faut trouver laquelle des deux courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ est au-dessus de l'autre, mais cette fois sur l'intervalle $[1\,;t]$.
On en déduit $\mathcal{B}_t = [F(x)]_1^t$ ce qui conduit au résultat.

b) Il s'agit enfin de résoudre $F(t) = 1 - \dfrac{1}{e}$, ce qui a été fait à la dernière question de la partie précédente.

Métropole juin 2011 Exercice 3 ←

1. **a)** Vérifier $F'(x) = (x - k - 1)e^{-x}$

   b) Si $k = -1$ on a pour tout x etc...

   c) Donc $I_1 = \left[(-x-1)e^{-x}\right]_0^1$: il suffit de terminer le calcul .

2. **a)** (I_n) est l'aire sous la courbe de $\mathcal{C}_n$ entre 0 et 1
   Préciser la position relative de deux courbes consécutives $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$
   En déduire la conjecture attendue sur la suite des aires sous la courbe .

   b) Commencer par démontrer que sur $[0\,;1]$, on a : $x^{n+1} \leq x^n$
   Montrer que cela implique qu'il est possible de comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$
   Terminer en intégrant l'inégalité .

   c) Montrer que la fonction f_n est positive et appliquer le cours (deux théorèmes à utiliser).

   d) Montrer que sur $[0\,;1]$, on peut majorer $f_n(x)$ par x^n
   Majorer I_n en intégrant l'inégalité et conclure.

Antilles-Guyane juin 2012 Exercice 1 ←

Partie A

1. Utiliser les résultats sur la *croissance comparée*.
Le résultat s'interprète en termes d'asymptote.

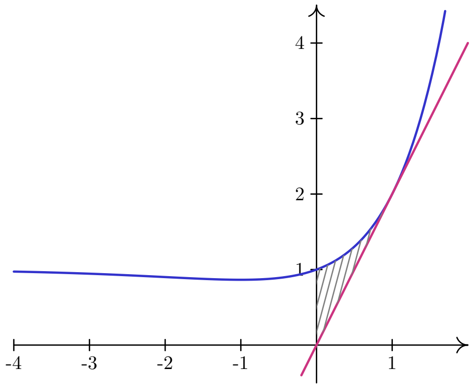
2. La limite est $+\infty$ (aucune indétermination)

3. La formule de dérivation d'un produit donne le résultat.

4. La fonction f admet un minimum pour $x = -1$ et ce minimum vaut $1 - e^{-2}$

Partie B

1. Figure



2. a) Montrer que $F(x) = (x-1)e^{x-1} + x$ est une primitive de f

b) Donc $I = F(1) - F(0)$ et il reste le résultat à calculer

3. Le résultat final est $\dfrac{1}{e}$.

↑ FORMULAIRE

Primitives

primitives des fonctions usuelles

f	F	remarques	f	F
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \neq -1$	$\sin x$	$-\cos x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$x > 0$	$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$x > 0$	e^x	e^x

utilisation d'une fonction auxiliaire

f	F	remarques	f	F
$u'\,u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$n \neq -1$	$u'\,\sin u$	$-\cos u$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u > 0$	$u'\,\cos u$	$\sin u$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$	$u'\,e^u$	e^u

composée avec une fonction affine — si $f(x)$ admet pour primitive $F(x)$, alors $f(ax+b)$ admet pour primitive $\dfrac{1}{a}\,F(ax+b)$

Intégrales définies

calcul d'une intégrale définie — $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

valeur moyenne — $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est la valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$

notation intégrale des primitives — la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a

Propriétés des intégrales

cas particuliers — $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

relation de Chasles — $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

positivité — si $f \geq 0$ sur $[a\,;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

respect de la relation d'ordre — si $f \leq g$ sur $[a\,;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Aires

aire sous la courbe — si $f \geq 0$ sur $[a\,;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

aire algébrique — si $f \leq 0$ sur $[a\,;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'opposé de $\mathcal{A}$

aire entre deux courbes — si $f \geq g$ sur $[a\,;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ est l'aire du domaine délimité par la courbe de f, la courbe de g, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$