Sujets

avril 2012	**Pondichéry**
juin 2012	**Centres étrangers**
novembre 2012	**Amérique du Sud**
septembre 2012	**Antilles-Guyane**

↓ Formulaire

↑ **Pondichéry avril 2012 . EXERCICE 2** →

Dans le repère orthonormé $\left(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère

- les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d' équations

$$\mathcal{P} : x - y - z - 2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}' : x + y + 3z = 0$$

- la droite $\mathcal{D}$ ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Proposition 1
La droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$

Proposition 2
L'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{cases} \qquad t' \in \mathbb{R}$$

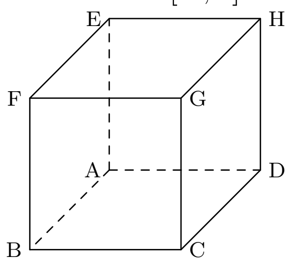
Proposition 3
Les droites Δ et $\mathcal{D}$ sont coplanaires.

↑ **Centres étrangers juin 2012 . EXERCICE 1** →

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(A\,, \overrightarrow{AB}\,, \overrightarrow{AD}\,, \overrightarrow{AE}\right)$.
On considère les points

$$I\left(1\,;\frac{1}{3}\,;0\right),\qquad J\left(0\,;\frac{2}{3}\,;1\right),\qquad K\left(\frac{3}{4}\,;0\,;1\right)\quad \text{et}\quad L\,(a\,;1\,;0)$$

avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$.



Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ)

2. Montrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4} + t'\left(a - \dfrac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases} \qquad t' \in \mathbb{R}$$

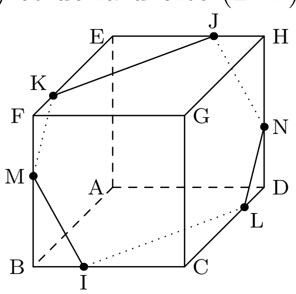
3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \dfrac{1}{4}$

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \dfrac{1}{4}$: L a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{4}\,;1\,;0\right)$.

1. Vérifier par exemple que $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{KJ}$ ont les mêmes coordonnées

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube $ABCDEFGH$.
On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).



Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N .

a) Prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(8\,;9\,;5)$ est un vecteur normal au plan (IJK)

b) En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$

c) En déduire les coordonnées des points M et N .

↑ **Amérique du Sud novembre 2012 . EXERCICE 4** →

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x - y + 3z - 1 = 0$
et soit S le point de coordonnées $(1\,;3\,;5)$.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et proposer une démonstration de la réponse indiquée.

1. Les points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les trois axes du repère sont les sommets d'un triangle isocèle.

2. La droite δ_1 de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 4t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$
est incluse dans le plan $\mathcal{P}$

3. La droite δ_2 de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -t \\ y = 7 + 4t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 7 + 2t \end{cases}$$
est la droite parallèle à la droite δ_1 passant par le point S

4. On considère le point P de coordonnées $\left(-\dfrac{6}{7}\,;\dfrac{55}{14}\,;\dfrac{31}{14}\right)$.
Ce point est le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite qui passe par S qui est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

↑ **Antilles-Guyane septembre 2012 . EXERCICE 1** →

$\left(O\,,\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\,,\overrightarrow{k}\right)$ est un repère orthonormal de l'espace .
On note $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \quad \text{où} \quad \text{t} \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

Soit $\mathcal{P}$ le plan défini par l'équation $x + y + 2z - 1 = 0$.
Pour chacune des phrases ci-dessous, une seule des trois propositions est exacte. Dans chaque cas, indiquer la bonne réponse en justifiant soigneusement votre choix.

1. La droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont :

a) parallèles

b) perpendiculaires

c) non parallèles et non perpendiculaires

2. Soit $\mathcal{P}'$ le plan contenant la droite $\mathcal{D}$ et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}'$ admet pour équation cartésienne :

a) $-2x + z + 2 = 0$

b) $2x - z = 0$

c) $x - y - z = 0$

3. La droite Δ intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan d'équation $2x - z = 0$, admet pour représentation paramétrique :

a) $\begin{cases} x = t \\ y = -3t + 1 \quad \text{où} \quad \text{t} \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = t \\ y = -t \quad \text{où} \quad \text{t} \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = t \\ y = -5t + 1 \quad \text{où} \quad \text{t} \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$

Pondichéry avril 2012 . EXERCICE 2 ←

Proposition 1 : VRAI
Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan $\mathcal{P}$
Déterminer ensuite les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ directeur de la droite $\mathcal{D}$
Montrer ensuite que ces vecteurs sont colinéaires c'est-à-dire que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{n}$

Proposition 2 : VRAI
Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan $\mathcal{P}$ et d'un $\overrightarrow{n'}$ normal au plan $\mathcal{P}'$.
Montrer ensuite que les deux plans sont sécants .
Montrer que la droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$ en vérifiant que les coordonnées d'un point de la droite Δ vérifient l'équation du plan $\mathcal{P}$.
Montrer de même que Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}'$ et conclure.

Proposition 3 : FAUX
Les deux droites n'ont aucun point commun, ce qui se prouve en résolvant le système

$$\begin{cases} -3-2t &= -1-t' \\ 2t &= 1-2t' \qquad t' \in \mathbb{R} \\ 1+2t &= t' \end{cases}$$

Les deux droites ne sont pas parallèles : pour le montrer donner les coordonnées d'un vecteur directeur de chaque droite et vérifier que ces vecteurs ne sont pas colinéaires.
Elles ne peuvent donc être coplanaires.

Centres étrangers juin 2012 . EXERCICE 1

←

Partie A

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ}$.
Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est par exemple

$$\begin{cases} x &= x_I + t\, x_{\overrightarrow{IJ}} \\ y &= y_I + t\, y_{\overrightarrow{IJ}} \qquad t \in \mathbb{R} \\ z &= z_I + t\, z_{\overrightarrow{IJ}} \end{cases}$$

2. Appliquer la même méthode que celle de la question précédente

3. Résoudre le système obtenu en identifiant les deux représentations paramétriques.

Partie B

1. Vérifier par exemple que $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{KJ}$ ont les mêmes coordonnées

2. a) Il suffit de vérifier que $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK).
Par exemple vérifier que le produit scalaire $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{KJ}$ s'annule
Vérifier ensuite que le produit scalaire $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{KI}$ s'annule

b) Écrire que le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z + d = 0$
Calculer la constante d en utilisant le fait que -par exemple- les coordonnées de I vérifient cette équation cartésienne

c) Le point M a pour coordonnées $(1\,;0\,;z_M)$ car c'est un point de (BF) : on peut calculer z_M car les coordonnées de M vérifient l'équation précédente.
Montrer ainsi $M\left(1\,;0\,;\dfrac{3}{5}\right)$ puis $M\left(0\,;1\,;\dfrac{2}{5}\right)$

Amérique du Sud novembre 2012 . EXERCICE 4 ←

1. FAUX.
   On note I, J et K les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et l'axe des cotes.
   Le point I a pour coordonnées $(x_I\,;0\,;0)$. Calculer x_I en écrivant que les coordonnées de I vérifient l'équation du plan et montrer ainsi : $I\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;0\right)$
   Montrer de même : $J\,(0\,;-1\,;0)$ et $K\left(0\,;0\,;\dfrac{1}{3}\right)$.
   Calculer pour finir IJ , JK et KI puis conclure.

2. FAUX.
   Il suffit de trouver un point de δ_1 qui n'appartient pas à $\mathcal{P}$: tester quelques valeurs simples du paramètre t'.

3. VRAI
   Montrer que δ_1 et δ_2 ont des vecteurs directeurs colinéaires puis que S appartient à δ_2.

4. VRAI.
   Vérifier que le point P appartient au plan $\mathcal{P}$.
   Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan $\mathcal{P}$ puis les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{SP}$: montrer que ces deux vecteurs sont colinéaires.

Antilles-Guyane septembre 2012 . EXERCICE 1 ←

1. Réponse c)
   Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ directeur de la droite $\mathcal{D}$ puis les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan $\mathcal{P}$ et vérifier que ces deux vecteurs ne sont ni colinéaires ni orthogonaux.

2. Réponse b)
   Appelons $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ les plans dont une équation est donnée dans les réponses respectivement a) b) et c)
   Vérifier que seuls les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ contiennent la droite $\mathcal{D}$.
   Donner les coordonnées de $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ et $\overrightarrow{n_3}$ normaux à chacun de ces plans .
   Vérifier que seuls $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{n}$ et conclure.

3. Réponse c)
   Le plus rapide est de résoudre le système formé par les équations cartésiennes des deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ en posant $x = t$ où t est un paramètre réel arbitraire.

↑ FORMULAIRE

Géométrie vectorielle dans l'espace

vecteurs colinéaires	il existe $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ tel que $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} = \vec{0}$
vecteurs coplanaires	il existe $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$ tel que $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w} = \vec{0}$
repère de l'espace	une origine O et trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ non coplanaires
repère orthonormé	$\left\lVert\vec{i}\right\rVert = \left\lVert\vec{j}\right\rVert = \left\lVert\vec{k}\right\rVert = 1$ et $\vec{i} \perp \vec{j}$ $\quad \vec{j} \perp \vec{k}$ $\quad \vec{k} \perp \vec{i}$
coordonnées d'un vecteur	$\vec{V}(x\,;y\,;z)$ est équivalent à $\vec{V} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$
coordonnées d'un point	$M(x\,;y\,;z)$ est équivalent à $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$
vecteur défini par deux points	les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{cases} x_{\overrightarrow{AB}} &= x_B - x_A \\ y_{\overrightarrow{AB}} &= y_B - y_A \\ z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \end{cases}$
milieu de deux points	si I est le milieu de $[AB]$, ses coordonnées sont $\begin{cases} x_I &= \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I &= \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_I &= \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$

Produit scalaire dans l'espace

définition métrique	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[\lVert\vec{u}\rVert^2 + \lVert\vec{v}\rVert^2 - \lVert\vec{v} - \vec{u}\rVert^2\right]$
formule du cosinus	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert\,\lVert\vec{v}\rVert\,\cos(\vec{u}\,,\vec{v})$
caractérisation de l'orthogonalité	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$
	dans un repère orthonormé :
expression analytique	si $\vec{u}(x\,,y\,,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$
norme d'un vecteur	si $\vec{u}(x\,,y\,,z)$, alors $\lVert\vec{u}\rVert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
distance entre deux points	$AB = \left\lVert\overrightarrow{AB}\right\rVert = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
sphère	si $S(I\,,r)$ est la sphère de centre I et de rayon r : $M(x\,,y\,,z) \in S(I\,,r) \iff (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 + (z - z_I)^2 = r^2$

Droites de l'espace

droites coplanaires	d_1 et d_2 sont coplanaires lorsque $d_1 \parallel d_2$ ou $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$
droites non coplanaires	d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires lorsque $d_1 \nparallel d_2$ et $d_1 \cap d_2 = \emptyset$
représentation paramétrique	si $d(A,\vec{u})$ est la droite de vecteur directeur $\vec{u}$, passant par le point A : $M(x,y,z) \in d(A,\vec{u}) \iff \begin{cases} x &= x_A + t\,x_{\vec{u}} \\ y &= y_A + t\,y_{\vec{u}} \\ z &= z_A + t\,z_{\vec{u}} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
parallélisme et orthogonalité	$d_1(A,\vec{u}) \parallel d_2(B,\vec{v})$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $d_1(A,\vec{u}) \perp d_2(B,\vec{v})$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Plans de l'espace

vecteur normal à un plan	vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ orthogonal à tous les vecteurs du plan P ($\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P suffit)
équation cartésienne	Si $\vec{n}(a\,,b\,,c)$ est normal à P et si $M(x\,,y\,,z)$: $M \in P \iff a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$
position relative de deux plans	si P_1 et P_2 ont pour vecteur normal respectivement $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$: $P_1 \parallel P_2$ lorsque $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont colinéaires $P_1 \perp P_2$ lorsque $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont orthogonaux
position d'une droite et d'un plan	si $\vec{u}$ est vecteur directeur de d et $\vec{n}$ est vecteur normal de P : $d \parallel P$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux $d \perp P$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires
plan médiateur	soit I le milieu du segment $[AB]$: le plan P qui passe par I et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ est le plan médiateur de $[AB]$
plan tangent à une sphère	soient S une sphère de centre I et P un plan passant par $A \in S$ le plan P est tangent à S lorsque $\overrightarrow{IA}$ est normal à P