Sujets

↓ Formulaire

↑ **Amérique du Nord mai 2012 . EXERCICE 2** →

On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$
On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormal $\left(O\,,\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\right)$.
On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$

1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$
Montrer que la fonction g est positive sur $[1\,;+\infty[$

2. **a)** Montrer que pour tout x de $[1\,;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire le sens de variations de f sur $[1\,;+\infty[$

3. **a)** Représenter graphiquement à l'aide de la calculatrice la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$.
Proposer une conjecture concernant la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$.

b) Démontrer la conjecture faite à la question précédente.

4. Dans cette question, on appelle M_k et N_k les points de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$ d'abscisse k où k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Justifier que la distance M_kN_k entre ces deux points est égale à $\dfrac{\ln k}{k}$
Quelle est la limite de cette distance M_kN_k lorsque k tend vers l'infini ?

b) Écrire un algorithme qui affiche le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure à 10^{-2}

↑ **Antilles-Guyane juin 2012 . EXERCICE 1** →

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x-1} + 1$
On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$.

Partie A

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$

3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout x réel : $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$

4. Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations de cette fonction.

Partie B

Soit a un réel strictement positif.
Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a . Donner une équation de T_a .

2. Démontrer qu'une tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité
$$1 - a^2e^{a-1} = 0$$

3. On cherche dans cette question à résoudre l'équation $1 - x^2e^{x-1} = 0$ où $x > 0$

a) Vérifier que 1 est solution de cette équation.

b) Montrer qu'il n'y a pas d'autre solution sur $]0\,;+\infty[$

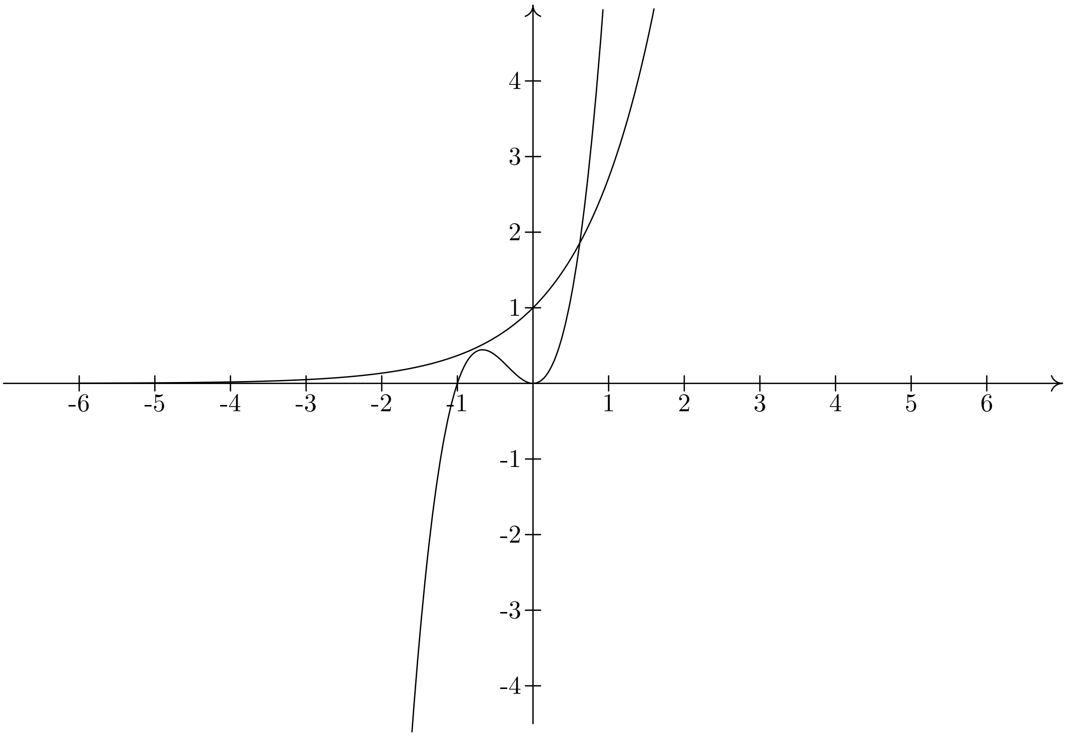
4. Donner une équation de la tangente recherchée.

↑ **Centres étrangers juin 2012 . EXERCICE 3** →

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $e^x = 3(x^2 + x^3)$

Partie A : conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x^2 + x^3)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. **a)** Étudier selon les valeurs de x le signe de $x^2 + x^3$

b) En déduire que l'équation (E) n'a pas de solutions sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$

c) Vérifier que 0 n'est pas solution de (E)

2. On considère la fonction h définie pour tout nombre réel de $]-1\,;-0[\cup]0\,;+\infty[$ par

$$h(x) = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1+x) - x$$

Montrer que sur $]-1\,;-0[\cup]0\,;+\infty[$ l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$

3. **a)** Montrer que pour tout x appartenant à $]-1\,;-0[\cup]0\,;+\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}$$

b) Déterminer les variations de la fonction h

c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.

d) Conclure quant à la conjecture de la partie **A**

↑ **Amérique du Sud novembre 2012 . EXERCICE 1** →

1. **Restitution organisée de connaissances**.

   L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

   On suppose connus les résultats suivants :

   - la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa propre dérivée
   - $e^0 = 1$
   - pour tout x réel : $e^x > x$
   - Soient u et v deux fonctions définies sur $[A\,;+\infty[$ où A est un réel.
     Si pour tout $x \geq A$ on a $u(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$

   a) Soit ϕ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\phi(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.
   Montrer que pour tout x de $[0\,;+\infty[$, on a $\phi(x) \geq 1$

   b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

2. Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x\,e^{-\frac{1}{2}x}$

   a) Étudier la limite de f en $+\infty$

   b) Étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

Amérique du Nord avril 2012 . EXERCICE 2 ←

1. Calculer la dérivée et étudier les variations de g. Calculer ensuite $g(1)$ et conclure.

2. **a)** Utiliser la dérivée d'un quotient pour dériver le second terme.
Réduire ensuite au même dénominateur x^2

b) Justifier le fait que $f'(x)$ est du signe de $g(x)$
Utiliser la question précédente pour obtenir les variations de f

3. **a)** Il s'agit de prévoir laquelle des deux courbes est au-dessus de l'autre

b) Calculer la différence entre les deux fonctions (celle dont la courbe paraît au-dessus en premier) et montrer que cette différence est positive

4. **a)** Les deux points ayant la même abscisse, la distance entre ces points est la différence entre leurs ordonnées (plus grande ordonnée moins plus petite ordonnée)
Utiliser les résultats sur la « *croissance comparée* »

b) On a besoin d'une variable k (l'abscisse) et d'une variable d (la distance).
Initialiser l'abscisse et la distance.
Tant que la distance est au-dessus de la précision souhaitée, incrémenter l'abscisse et recalculer la distance.
Afficher l'abscisse pour laquelle on est sorti le la boucle « *tant que* »

Antilles-Guyane juin 2012 . EXERCICE 1 ←

Partie A

1. Justifier que la limite est 1 en utilisant les théorèmes sur la « *croissance comparée* »
En déduire un droite asymptote.

2. La limite est $+\infty$ (aucune indétermination)

3. Il suffit d'utiliser la dérivée d'un produit

4. Justifier que $f'(x)$ est du signe de $x+1$: le tableau de variations de f en découle.
La fonction f admet un minimum en $x=-1$ et ce minimum vaut $1-e^{-2}$

Partie B

1. La tangente T_a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
Montrer que dans ce cas, elle admet pour équation

$$y = (a+1)e^{a-1}(x-a) + ae^{a-1} + 1$$

2. Le point O appartient à T_a lorsque ses coordonnées (0 ; 0) vérifient l'équation précédente.

3. **a)** Le résultat est immédiat en utilisant $e^0 = 1$

b) Poser $g(x) = 1 - x^2e^{x-1}$ et étudier ses variations sur $]0\,;+\infty[$

4. La tangente cherchée est T_1 : donner une équation de cette droite.

Centres étrangers juin 2012 . EXERCICE 3 ←

Partie A : conjecture graphique

Les solutions de (E) sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.
Il semble y en avoir deux.
Donner un encadrement de chacune d'elles.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. a) Factoriser $x^2 + x^3$ avant d'étudier son signe.

   b) Utiliser le signe de la fonction exponentielle et le signe établi dans la question précédente.

   c) C'est immédiat en remplaçant x par 0

2. Donner une équation équivalente en prenant le logarithme de chaque membre.

3. a) Dériver $\ln u$ et réduire au même dénominateur

   b) Étudier le signe de $-x^2 + 2x + 2$ puis le signe de $x(x + 1)$
   Construire un tableau résumant les résultats. En déduire les variations de h.

   c) Appliquer le théorème des « *valeurs intermédiaires* »

   d) La conjecture de la partie **A** paraît très hasardeuse : il y a bien deux solutions mais pas dans les intervalles prévus.

Amérique du Sud novembre 2012 . EXERCICE 1 ←

Amérique du Sud novembre 2012 . EXERCICE 1

1. **a)** Calculer $\phi'(x)$ et montrer que cette dérivée est strictement positive.
En déduire les variations de ϕ .
Pour finir, calculer $\phi(0)$ et conclure .

   b) Diviser par $x > 0$ et utiliser le théorème des gendarmes (dernière propriété admise)

2. **a)** Appliquer le résultat de la question précédente en posant $X = \dfrac{1}{2}x$

   b) La fonction f admet un maximum pour $x = 2$

↑ FORMULAIRE

Continuité

fonction continue sur un intervalle: f est continue sur l'intervalle I lorsqu'elle admet une limite en tout point de I
si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I

théorème des *valeurs intermédiaires*: si f est continue sur $[a\,;b]$, l'équation $f(x)=k$ admet *au moins* une solution pour toute valeur de k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$

théorème de la *bijection*: si de plus f est monotone, il y a une seule solution

le résultat s'étend à un intervalle ouvert en remplaçant les images $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f en a et en b

Dérivées

équation de la tangente: $(T_a) \quad y = f'(a)(x-a)+f(a)$

variations des fonctions: si $f'>0$ sur l'intervalle I, f est strictement croissante sur I
si $f'<0$ sur l'intervalle I, f est strictement décroissante sur I

dérivées des fonctions usuelles

f	f'	remarques	f	f'	remarques
x^n	$n\,x^{n-1}$		$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$x \neq 0$
$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$x \neq 0$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$x > 0$	e^x	e^x	
$\sin x$	$\cos x$		$\cos x$	$-\sin x$	

opérations: $(u+v)'=u'+v' \quad (k\,u)'=k\,u' \quad (u\,v)'=u'\,v+u\,v'$

$$\left(\frac{1}{u}\right)'=\frac{-u'}{u^2} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\,v-u\,v'}{v^2}$$

utilisation d'une fonction auxiliaire

f	f'	remarques	f	f'	remarques
u^n	$n\,u^{n-1}\,u'$		$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$	$u > 0$	e^u	$u'\,e^u$	
$\sin u$	$u'\,\cos u$		$\cos u$	$-u'\,\sin u$	

composée avec une fonction affine: $[f(ax+b)]' = a\,f'(ax+b)$

Exponentielle

définition: exp est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$
exp est strictement positive

propriétés algébriques: $e^{a+b}=e^a\,e^b \qquad e^{-b}=\dfrac{1}{e^b} \qquad e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$

$e^{n\,a}=(e^a)^n \qquad e^{\frac{1}{2}a}=\sqrt{e^a}$

limites: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

croissance comparée: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

Logarithme

définition: pour tout $k>0$: $e^x = k \iff x = \ln k$
ln est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*} =]0\,;+\infty[$
ln s'annule en $x=1$

propriétés algébriques: $\ln(ab)=\ln a+\ln b \qquad \ln\dfrac{1}{b}=-\ln b \qquad \ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b$

$\ln a^n = n\,\ln a \qquad \ln\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\,\ln a$

limites: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

croissance comparée: $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\,\ln x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$

logarithme décimal: $\log x = \ln x/\ln 10$