Sujets

↓ Formulaire

↑ **Antilles-Guyane septembre 2012 . EXERCICE 2** →

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$.
On considère les points A et C d'affixes respectives

$$z_A = \sqrt{3} + i \qquad z_C = -1 - 3i$$

1. On note B le point tel que $z_B = i\,z_A$

a) Calculer l'affixe du point B sous forme algébrique.

b) Écrire les nombres z_A et z_B sous forme exponentielle.

c) Démontrer que le rectangle OAB est rectangle isocèle.

d) Faire une figure (unité : 2cm) où seront placés les points A, B et C .

2. On note D le point tel que $z_D = i\,z_C$ et E le point tel que $z_E = z_B + z_C$.

a) Calculer l'affixe des points D et E .

Compléter la figure.

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

Montrer $OE = AD$

3. Dans cette question, on redémontre les deux résultats géométriques précédents par une autre méthode.

a) Montrer : $\dfrac{z_D - z_A}{z_E} = i$

b) Interpréter géométriquement $\left|\dfrac{z_D - z_A}{z_E}\right|$ et $\arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_E}\right)$ puis conclure.

↑ **Amérique du Sud novembre 2012 . EXERCICE 2** →

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,,\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v})$ (unité 2cm) .
Soit A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_A = i\ ,\quad z_B = 2i \quad \text{et} \quad z_C = 1$$

On considère la transformation f qui à tout point M d'affixe $z \neq i$ associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{2iz}{z-i}$$

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure.

1. Un point M est dit *invariant* lorsque $M' = M$.

Déterminer les points invariants en résolvant $z' = z \iff \dfrac{2iz}{z-i} = z$

2. Déterminer sous forme algébrique les affixes des points B' et C', images des points B et C par la transformation f.

3. Démontrer que pour tout point $M \neq A$: $z' - 2i = \dfrac{-2}{z-i}$

4. On suppose dans cette question que M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1

a) Justifier que l'on a : $|z-i| = 1$

b) En déduire la valeur de $\left|z' - 2i\right|$.
Montrer que M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

5. On considère le point D d'affixe $z_D = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$.

a) Vérifier que D appartient au cercle Γ.

b) Montrer que les points B , D et D' sont alignés.

c) En déduire une construction *à la règle et au compas* de D'

↑ **Pondichéry avril 2012 . EXERCICE 4** →

Partie A . Restitution organisée de connaissances
Soit z , z_1 et z_2 des nombres complexes.
- on rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z
- on admet l'égalité $|z|^2 = z\,\overline{z}$
- on admet la propriété $\overline{z_1\,z_2} = \overline{z_1}\;\overline{z_2}$

Démontrer le résultat suivant : $|z_1\,z_2| = |z_1|\;|z_2|$

Partie B . Étude d'une transformation
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives 1 et -1.
Soit f la transformation qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$ associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{1-z}{\overline{z}-1}$$

Une figure est donnée en annexe et sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit C le point d'affixe $z_C = -2+i$.

a) Déterminer $z_{C'}$ l'affixe du point C' par la transformation f .
b) Montrer que C' appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 .
c) Montrer que les points A , C et C' sont alignés.

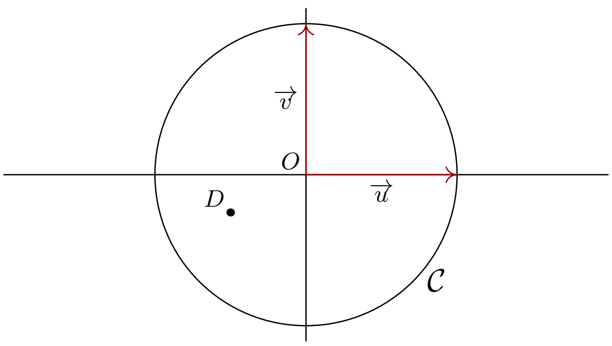
2. On étudie dans cette question les points M qui ont pour image par $f$le point A

a) Montrer que si M a pour image A, alors $z+\overline{z}=2$
On pose $z = x+iy$ où x et y sont réels : montrer que M appartient à une droite Δ dont on précisera une équation.
b) Compléter la figure avec la droite Δ

3. Montrer que dans tous les cas, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est un nombre réel.
Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?

4. On a placé un point D sur la figure donnée en annexe : construire géométriquement son image en utilisant les questions précédentes .

$\boxed{\text{Figure}}$



↑ **Liban mai 2012 . EXERCICE 4** →

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Un triangle.
Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 2$, $b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$.

a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

b) En déduire que l'affixe ω du point Ω, centre du cercle circonscrit au triangle ABC est $1 + i\sqrt{3}$.

2. Une suite de points du plan.
On définit la suite de nombres complexes (z_n) par $z_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\, z_n + 2$$

On note A_n le point d'affixe z_n.

a) Vérifier que les points A_1 , A_2 , A_3 et A_4 ont pour affixes respectives :

$$2\ , \quad 3 + i\sqrt{3}\ , \quad 2 + 2i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 2i\sqrt{3}$$

b) Calculer la longueur des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$

c) Démontrer que pour tout entier naturel n : $\dfrac{z_{n+1} - \omega}{z_n - \omega} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$
En déduire que le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est équilatéral.

d) Démontrer que $A_6 = A_0$.

3. Calculer $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{2012}$. En déduire $A_{2012} = B$

Antilles-Guyane septembre 2012 . EXERCICE 2 ←

1. **a)** $-1 + i\sqrt{3}$

b) $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

c) Calculer OA et OB, modules respectifs de z_A et z_B
Calculer ensuite une mesure de $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ en utilisant un argument de de z_A et un argument de z_B

2. **a)** $3 - i$ et $-2 + i(\sqrt{3} - 3)$.

b) Calculer les affixes puis les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{AD}$
Montrer que les vecteurs sont orthogonaux en calculant leur produit scalaire
Montrer $OE = AD$ en calculant la norme des deux vecteurs

3. **a)** Écrire d'abord $\dfrac{z_D - z_A}{z_E} = \dfrac{(3-i) - (\sqrt{3}+i)}{-2 + i(\sqrt{3} - 3)}$
Calculer le numérateur, mettre i en facteur au numérateur puis simplifier

b) Appliquer le *théorème d'interprétation géométrique*
- le module du quotient est le quotient de deux distances
- un argument du quotient est une mesure d'angle

Amérique du Sud novembre 2012 . EXERCICE 2 ←

1. 0 et $3i$

2. 4 et $1+i$

3. Réduire la différence au même dénominateur $z-i$

4. **a)** $|z-i|$ est égal à la distance entre deux points (à préciser) : le résultat s'ensuit

b) $\left|z'-2i\right| = 2$ ce qui de nouveau s'interprète en termes de distance

5. **a)** Pour montrer que D appartient au cercle Γ, calculer la distance AD

b) Calculer l'affixe respective des vecteurs $\overrightarrow{BD'}$ et $\overrightarrow{BD}$
Montrer que leur quotient est un nombre réel et conclure

c) Montrer que D' appartient à un cercle et à une droite
Préciser lequel des deux points d'intersection représente D'

Pondichéry avril 2012 . EXERCICE 4 ←

Partie A . Restitution organisée de connaissances

- exprimer $|z_1\, z_2|^2$ en utilisant la première égalité de l'énoncé
- transformer l'expression obtenue en appliquant la propriété rappelée dans l'énoncé
- exprimer par ailleurs $|z_1|^2\,|z_2|^2$en utilisant la première égalité
- constater que les deux expressions obtenues sont égales
- identifier les deux nombres réels qui ont été transformés et conclure en calculant leur racine carrée

Partie B . Étude d'une transformation

1. Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + i$.

a) $\dfrac{-4+3i}{5}$

b) La distance OC' est le module de $z_{C'}$

c) On peut par exemple montrer que $\dfrac{z_C - z_A}{z_{C'} - z_A}$ est réel et interpréter ce résultat.

2. On veut étudier dans cette question les points M qui ont pour image le point A par f

a) Écrire $z' = 1$, remplacer z' par l'expression donnée dans le texte et transformer l'égalité. En remplaçant z par $x + iy$, montrer que la condition obtenue correspond à $x = 1$ qui est l'équation d'une droite.

b) Compléter la figure avec la droite qui a pour équation $x = 1$

3. Montrer d'abord que $\dfrac{z'-1}{z-1} = \dfrac{2-z-\overline{z}}{(1-z)(1-\overline{z})}$ Remplacer ensuite z par $x + iy$ pour prouver que ce quotient est un nombre réel.

En déduire une propriété concernant les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AM}$

4. L'image du point D est point d'intersection d'un cercle et d'une droite

Liban mai 2012 . EXERCICE 4 ←

1. **Un triangle.**

   a) Calculer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$
   Calculer ensuite le quotient de ces deux affixes et montrer que ce quotient est un imaginaire pur
   En déduire une mesure par exemple de $\left(\overrightarrow{BC}\,,\overrightarrow{BA}\right)$

   b) Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de son hypoténuse

2. **Une suite de points du plan.**

   a) Partant de $z_0 = 0$, tous les calculs sont élémentaires.
   On vérifie $A_1 = A$, $A_2 = B$ et $A_4 = C$

   b) Calculer ensuite le module de la différence des affixes : on trouve 2 dans les trois cas.

   c) L'égalité demandée s'obtient en remplaçant z_{n+1} par l'expression donnée dans l'énoncé et en remplaçant ω par sa valeur.
   Calculer ensuite le module et un argument de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$
   Pour finir, il suffit d'appliquer le *théorème d'interprétation géométrique* : on calcule ainsi un quotient de deux distances et une mesure d'angle, ce qui suffit pour conclure

   d) Vérifier $\dfrac{z_6-\omega}{z_0-\omega} = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6$
   Montrer ensuite que ce quotient est en fait égal à 1 , ce qui permet de déterminer A_6

3. Puisque $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 1$, il suffit de poser la division euclidienne de 2012 par 6 pour simplifier le quotient.
   Le résultat en découle

↑ FORMULAIRE

Forme algébrique

calculs dans $\mathbb{C}$	$i^2 = -1$
partie réelle, partie imaginaire	si $z = x + iy$, où x et $y \in \mathbb{R}$, alors $Ré(z) = x$ et $Im(z) = y$
égalité de deux nombres complexes	$z = z' \iff x = x' \quad \text{et} \quad y = y'$
réels et imaginaires purs	$z \in \mathbb{R} \iff Im(z) = 0 \qquad z \in i\mathbb{R} \iff Ré(z) = 0$ les réels sont les affixes des points de l'axe $(0, \vec{u})$ les imaginaires purs sont les affixes des points de l'axe $(0, \vec{v})$
conjugué	si $z = x + iy$, le conjugué de z est $\overline{z} = x - iy$ les points d'affixes z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à $(0, \vec{u})$
propriétés du conjugué	$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \qquad \overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ $\overline{\left(\dfrac{1}{z_2}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z_2}} \qquad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
caractérisations	$z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z \qquad z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$
module d'un nombre complexe	si $z = x + iy$, le module de z est $\lvert z\rvert = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$
module du conjugué	z et $\overline{z}$ ont toujours le même module : $\lvert\overline{z}\rvert = \lvert z\rvert$
inégalité triangulaire	$\lvert z_1 + z_2\rvert \leq \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert$
autres propriétés du module	$\lvert z_1 \cdot z_2\rvert = \lvert z_1\rvert \cdot \lvert z_2\rvert \qquad \lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$ $\left\lvert\dfrac{1}{z_2}\right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z_2\rvert} \qquad \left\lvert\dfrac{z_1}{z_2}\right\rvert = \dfrac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

forme trigonométrique	si $z \neq 0$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \lvert z\rvert(\cos\theta + i\sin\theta)$
argument	on note $\theta = \arg(z)$ ce réel θ est défini à 2π près
caractérisation d'un réel	si $z \neq 0$, alors $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = k \cdot \pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
caractérisation d'un imaginaire pur	si $z \neq 0$, alors $z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
argument du conjugué	z et $\overline{z}$ ont toujours des arguments opposés : $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$
autres propriétés de l'argument	$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \qquad \arg(z^n) = n\arg(z)$ $\arg\left(\dfrac{1}{z_2}\right) = -\arg(z_2) \qquad \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$
écriture exponentielle	$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \qquad \overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$
formules avec écriture exponentielle	$e^{i\theta_1}\,e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{ni\theta}$ $\dfrac{1}{e^{i\theta_2}} = e^{-i\theta_2} \qquad \dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
formules d'Euler	$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
formule de Moivre	$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Géométrie

	dans le plan rapporté au repère orthonormal direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$
affixe d'un point	si $M(x, y)$, alors $z_M = x + iy$ est l'affixe du point M
affixe d'un vecteur	si $\vec{V}(x, y)$, alors $z_{\vec{V}} = x + iy$ est l'affixe du vecteur $\vec{V}$
milieu	si I est le milieu de $[AB]$, alors $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
vecteur défini par deux points	$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
distance entre deux points	$AB = \lvert z_B - z_A\rvert$
réels et imaginaires purs	les réels sont les affixes des points de l'axe $(0, \vec{u})$ les imaginaires purs sont les affixes des points de l'axe $(0, \vec{v})$
conjugué	les points d'affixes z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à $(0, \vec{u})$
forme trigonométrique	si $z_M = r\,e^{i\theta}$ avec $r > 0$, alors $OM = r$ et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \theta$
théorème d'*interprétation géométrique*	si $Z = \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = r\,e^{i\theta}$ $(r > 0)$, alors $\dfrac{CD}{AB} = r$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \theta$