
Le marché du téléphone

Dans une ville imaginaire, le marché des télécommunications est partagé entre deux compagnies A et B. Initialement, la compagnie A truste 80% des abonnements. Mais la compagnie B est très agressive et cherche à augmenter sa part de marché.

Dans cette ville, la règle veut que chaque habitant doit à la fin de chaque année confirmer son abonnement auprès de la compagnie qu'elle a choisie ou au contraire changer de compagnie.

Une étude statistique conduit aux résultats suivants :

- il y a 6 chances sur 10 qu'à la fin d'une année une personne cliente de A souscrive un abonnement auprès de B
- il y a 3 chances sur 10 qu'à la fin d'une année une personne cliente de B souscrive un abonnement auprès de A

Quelle compagnie aura à long terme la plus grosse part de marché dans cette ville ?

Questions

On note a_n la proportion d'habitants qui sont clients de la compagnie A après n années.

De même b_n désigne la proportion d'habitants qui sont clients de la compagnie B après n années.

On a donc au départ $a_0 = 0,8$ et $b_0 = 0,2$.

1. L'algorithme suivant détermine l'évolution de la part de marché de chaque compagnie.

```

i , n , a , b , A , B sont des nombres
a prend la valeur .....
b prend la valeur .....
n prend la valeur .....
POUR i allant de 1 à n
  A prend la valeur .....
  B prend la valeur .....
  afficher n
  afficher A
  afficher B
  a prend la valeur A
  b prend la valeur B
FIN de la boucle POUR

```

2. Compléter et tester l'algorithme. Quelle conjecture peut être proposée ?

3. a) Démontrer que $a_{n+1} = 0,4a_n + 0,3b_n$

b) En déduire $a_{n+1} = 0,1a_n + 0,3$

c) Démontrer que $u_n = a_n - \frac{1}{3}$ est géométrique

d) En déduire la limite de (u_n) puis de (a_n) .

4. Quelle réponse peut-on apporter à la question initiale ?

1. D'après le texte :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,4 a_n + 0,3 b_n \\ b_{n+1} = 0,6 a_n + 0,7 b_n \end{cases}$$

Évolution de la part de marché de chaque compagnie.

`i , n , a , b , A , B` sont des nombres

`a` prend la valeur 0,8

`b` prend la valeur 0,2

`n` prend la valeur 10

POUR `i` allant de 1 à `n`

`A` prend la valeur `0.4 * a + 0.3 * b`

`B` prend la valeur `0.6 * a + 0.7 * b`

afficher `n`

afficher `A`

afficher `B`

`a` prend la valeur `A`

`b` prend la valeur `B`

FIN de la boucle POUR

2. Résultats numériques.

n	0	1	2	3	4	5
a_n	0,8	0,38	0,338	0,334	0,333	0,333
b_n	0,2	0,62	0,662	0,666	0,667	0,667

Conjecture : à terme les compagnies A et B auront respectivement $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ du marché.

3. a) Les clients de A pendant l'année $n + 1$ sont constitués de 40% des clients de A pendant l'année n et de 30% des clients de B pendant l'année n .

b) On remplace b_n par $1 - a_n$: $a_{n+1} = 0,4 a_n + 0,3 (1 - a_n) = 0,1 a_n + 0,3$

c) La suite auxiliaire $u_n = a_n - \frac{1}{3}$ est géométrique :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{a_n}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{a_n}{10} - \frac{1}{30} \\ &= \frac{1}{10} \left(a_n - \frac{1}{10} \right) \\ &= 0,1 u_n \end{aligned}$$

Sachant $u_0 = \frac{8}{10} - \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$, on peut écrire $u_n = \frac{7}{15} \left(\frac{1}{10} \right)^n$.

On en déduit : $a_n = \frac{7}{15} \left(\frac{1}{10} \right)^n + \frac{1}{3}$

d) Puisque $-1 < \frac{1}{10} < 1$, on a $\lim \left(\frac{1}{10} \right)^n = 0$.

On en déduit $\lim u_n = 0$ puis $\lim a_n = \frac{1}{3}$.

4. La conjecture précédente est vérifiée.