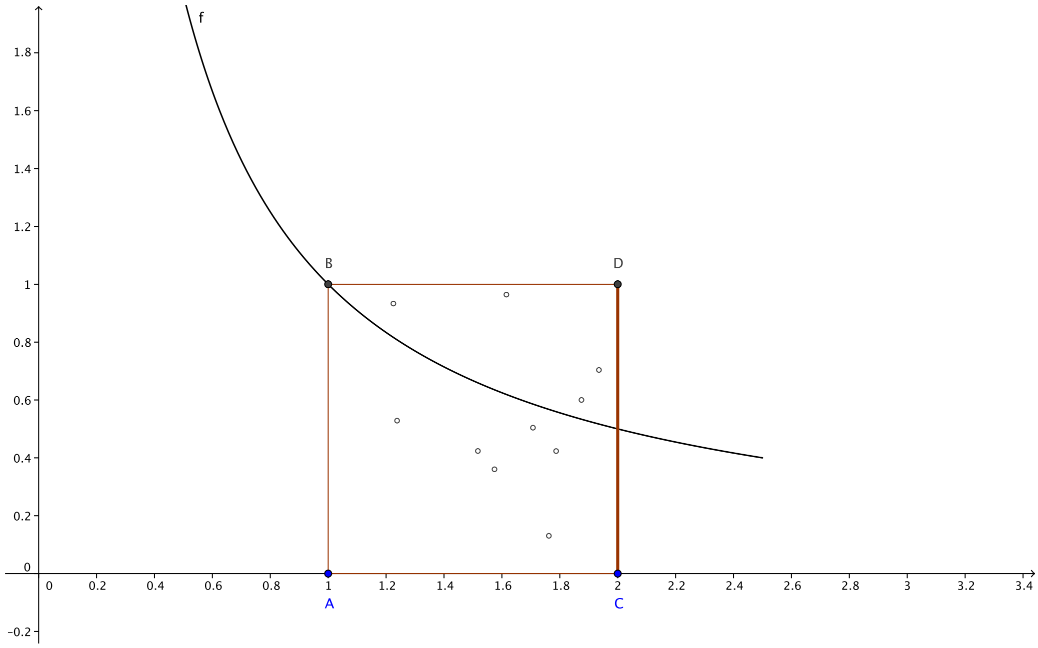
Approximation d'une aire par la méthode de Monte Carlo

On souhaite de nouveau calculer l'aire sous la courbe de la fonction inverse entre 1 et 2 .
Ce domaine est contenu dans un carré ABDC que l'on a représenté ci-dessous.

Figure.



On choisit 10 points au hasard dans le carré ABDC : parmi ces dix points 6 se trouvent en-dessous de la courbe, alors que 4 points se trouvent au-dessus.
La probabilité de choisir un point du carré sous la courbe est approximativement égale à 0,6 .
Or cette probabilité est le rapport entre l'aire sous la courbe et l'aire du carré : une estimation de l'aire sous la courbe est donc 0,6 .

Questions

1. On veut améliorer la précision du résultat.
On note n le nombre de points choisis au hasard dans le carré ABDC .
Un point M de coordonnées (x, y) est en-dessous de la courbe lorsque $y \leq \dfrac{1}{x}$
Dans un premier temps, on considère l'algorithme suivant où T désigne le nombre de points en-dessous de la courbe :

```
i , n , x , y , T sont des nombres
n prend la valeur 100
POUR i allant de 1 à n
   x prend la valeur 1 + random ()
   y prend la valeur random ()
   SI y <= 1 / x ALORS ...............
FIN de POUR
afficher ...............
```

Compléter cet algorithme de telle façon qu'il affiche en sortie une estimation de l'aire sous la courbe.

2. On souhaite maintenant que l'utilisateur indique en entrée le nombre n de points à choisir.
Proposer et tester un algorithme qui réponde à cette question.
Pour quelle valeur de n obtient-on expérimentalement une erreur inférieure à 10^{-1} ?

3. Déterminer une valeur approchée de π par la méthode de Monte Carlo.

1. Première estimation de l'aire .

```
i , n , x , y , T sont des nombres
n prend la valeur 100
POUR i allant de 1 à n
   x prend la valeur 1 + random ()
   y prend la valeur random ()
   SI y <= 1 / x ALORS T prend la valeur T + 1
FIN de POUR
afficher T / 100
```

2. Estimation avec choix du nombre de points .

```
i , n , x , y , T sont des nombres
lire n
etc .........
```

Résultats numériques.

n	10	100	1000	10 000
T / n	0,8	0,68	0,692	0,6983

On peut estimer que si $n \geq 100$, l'erreur faite en approchant l'aire par cette méthode est inférieure à 10^{-1} .

3. Il nous faut un domaine dont l'aire soit en rapport avec le nombre π :

- le disque de centre O et de rayon 1 a pour aire π et pour équation $x^2 + y^2 \leq 1$
- si on impose $y \geq 0$, on obtient un demi-disque de centre O et de rayon 1 qui a pour aire $\pi/2$
- si on impose $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on obtient un quart-de-disque d'aire $\pi/4$

La méthode de Monte Carlo est facile à adapter au cas du quart-de disque : on choisit au hasard des points dans le carré $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$ et on teste pour chaque point si $x^2 + y^2 \leq 1$.

```
i , n , x , y , T sont des nombres
lire n
POUR i allant de 1 à n
   x prend la valeur random ()
   y prend la valeur random ()
   SI x*x + y*y <= 1 ALORS T prend la valeur T + 1
FIN de POUR
afficher 4 * T / n
```

Résultats numériques.

n	10	100	1000	10 000
4 * T / n	2,4	3,08	3,172	3,1272