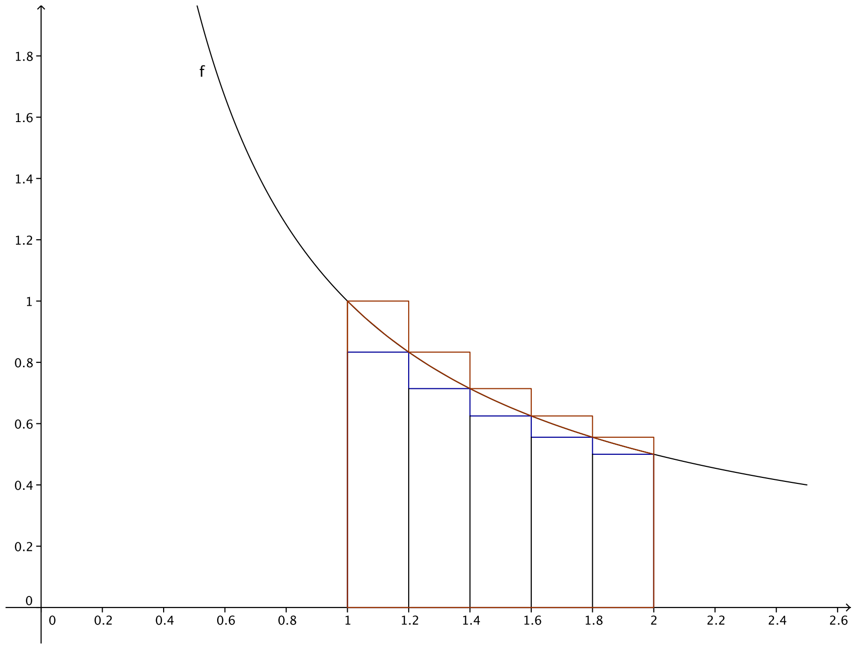
Approximation d'une aire par la méthode des rectangles

On souhaite calculer l'aire sous la courbe de la fonction inverse entre 1 et 2 .

Figure.



L'intervalle [1 ; 2] a été partagé en 5 petits intervalles d'amplitude 0,2 .

Le domaine dont on veut calculer l'aire est contenu dans la réunion de 5 petits rectangles dits « *à gauche* » de hauteurs respectives $f(1)$, $f(1,2)$, $f(1,4)$, $f(1,6)$ et $f(1,8)$.

Ce même domaine contient la réunion de 5 petits rectangles dits « *à droite* » de hauteurs respectives $f(1,2)$, $f(1,4)$, $f(1,6)$, $f(1,8)$ et $f(2)$.

Questions

1. Déterminer avec la calculatrice l'aire de la réunion des rectangles « *à gauche* » puis l'aire de la réunion des rectangles « *à droite* » .

En déduire un encadrement de l'aire du domaine. Comparer avec la valeur exacte.

2. On veut améliorer la précision du résultat.

On note n le nombre d'intervalles construits entre 1 et 2 et h le *pas* utilisé .

Chaque rectangle a pour base un intervalle $[a\,;b]$ dont les valeurs successives sont $[1\,;1,2]$, $[1,2\,;1,4]$ etc $\ldots[1,8\,;2]$.

Dans un premier temps, on considère l'algorithme suivant

```
i , n , h , a , b , G et D sont des nombres
n prend la valeur 5
h prend la valeur 1/n
a prend la valeur 1
b prend la valeur a + h
POUR i allant de 1 à n
   G prend la valeur .........
   D prend la valeur .........
   a prend la valeur a + h
   b prend la valeur a + h
FIN de POUR
afficher G
afficher D
```

Compléter cet algorithme de telle façon qu'il affiche en sortie la somme des aires des rectangles à gauche et la somme des aires des rectangles à droite.

3. On souhaite maintenant que l'utilisateur indique en entrée le nombre n d'intervalles à utiliser.
Proposer et tester un algorithme qui réponde à cette question.

4. Une assez bonne approximation de l'aire est obtenue en faisant la moyenne des deux approximations précédentes (méthode des *trapèzes*) : modifier et tester l'algorithme précédent de façon à implémenter cette méthode.

5. Déterminer une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 2t\ e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$. Quelle est la valeur exacte ?

---

1. Aire des rectangles à gauche : $G = [f(1) + f(1,2) + f(1,4) + f(1,6) + f(1,8)] \times 0,2 \approx 0,746$
   Aire des rectangles à droite : $D = [f(1,2) + f(1,4) + f(1,6) + f(1,8) + f(2)] \times 0,2 \approx 0,646$
   Encadrement de l'aire sous la courbe : $0,646 \leq A \leq 0,746$
   Valeur exacte : $A = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln x]_1^2 = \ln 2 \approx 0,693$
2. Algorithme permettant de calculer l'aire des rectangles à gauche et l'aire des rectangles à droite.

```
i , n , h , a , b , G et D sont des nombres
n prend la valeur 5
h prend la valeur 1/n
a prend la valeur 1
b prend la valeur a + h
POUR i allant de 1 à n
   G prend la valeur G + h / a
   D prend la valeur D + h / b
   a prend la valeur a + h
   b prend la valeur b + h
FIN de POUR
afficher G
afficher D
```

3. Algorithme avec choix du nombre d'intervalles.

```
i , n , h , a , b , G et D sont des nombres
lire n
etc .........
```

4. Implémentation de la méthode des trapèzes.

```
i , n , h , a , b , T , G et D sont des nombres
lire n
h prend la valeur 1/n
a prend la valeur 1
b prend la valeur a + h
POUR i allant de 1 à n
   etc .........
FIN de POUR
T prend la valeur (G + D) / 2
Afficher T
```

   Résultats numériques :

n	5	10	50
G	0.74563492	0.7187714	0.69817218
D	0.64563492	0.6687714	0.68817218
T	0.69563492	0.6937714	0.69317218