Résolution approchée d'une équation par dichotomie

On sait que la fonction exponentielle est continue et strictement croissante et que ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$ sont respectivement 0 et $+\infty$. Par conséquent l'équation

$$\boxed{e^x = 2}$$

a une solution α et une seule qu'on se propose d'encadrer par « *dichotomie* » .

Il est immédiat de vérifier que α est entre 0 et 1 : on a donc au départ un encadrement d'amplitude 1 . On va tester le milieu de cet intervalle, c'est-à-dire 0, 5 . Il y a deux possiblités :

- si $e^{0,5} > 2$ alors α est entre 0 et 0,5
- si $e^{0,5} < 2$ alors α est entre 0,5 et 1

On obtient ainsi un encadrement d'amplitude 0,5.

L'algorithme suivant applique cette méthode jusqu' à obtenir une précision suffisante :

```
VARIABLES
   x1 , x2 , xm , y1 , y2 et ym sont des nombres
   p est un nombre
DÉBUT
   x1 prend la valeur 0
   x2 prend la valeur 1
   p prend la valeur x2 - x1
   TANT_QUE p > 0.1
      xm prend la valeur (x1 + x2) / 2
      ym prend la valeur exp(xm)
      si ym < 2 alors x1 prend la valeur xm
      sinon ..............
      p prend la valeur ..............
   FIN de la boucle TANT_QUE
   ............
FIN
```

Questions

1. Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche les bornes d'un intervalle d'amplitude inférieure à 0,1.
2. Taper et tester l'algorithme avec Algobox. Indiquer l'encadrement de α qui est obtenu.
3. Comment améliorer la précision du résultat ?
4. Comment l'adapter de façon que l'utilisateur puisse donner au départ la précision souhaitée ?
5. On considère l'équation $-x^3 - 5x + 12 = 0$.
   Démontrer que cette équation a une solution et une seule dans $\mathbb{R}$.
   Adapter l'algorithme précédent de façon à obtenir un encadrement de cette solution d'amplitude inférieure à 10^{-5} .
   Combien d'itérations de la boucle TANT_QUE ont été nécessaires ?