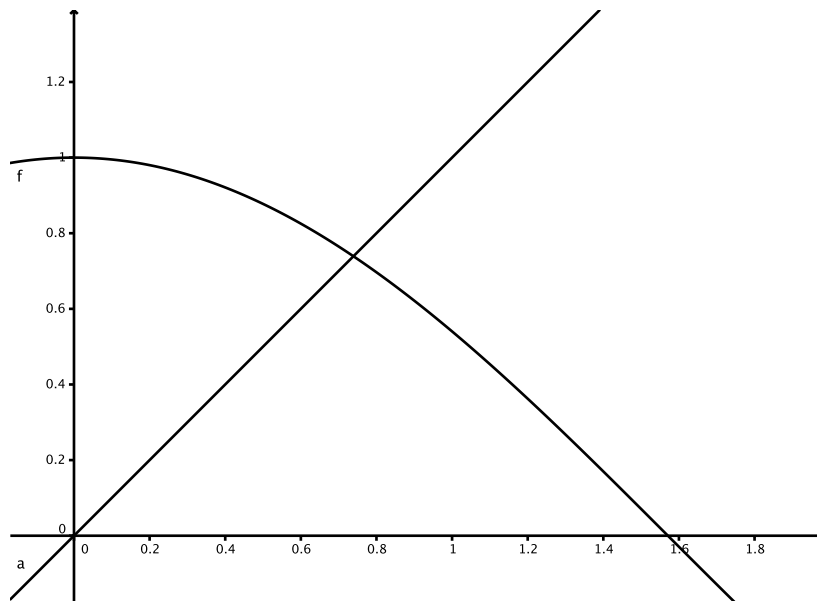


Résolution approchée d'une équation par balayage

Figure.



On a représenté ci-dessus la courbe d'équation $y = \cos x$ et la droite d'équation $y = x$.

On veut déterminer l'abscisse du point d'intersection des deux courbes qui est visible sur cette figure.

On peut observer graphiquement que cette abscisse est comprise entre 0 et 1.

Mise en forme du problème.

On note $f(x)$ la différence entre les deux fonctions représentées :

$$f(x) = x - \cos x$$

Il est alors équivalent de résoudre l'équation $f(x) = 0$

Ne sachant pas déterminer une solution exacte, on se contente d'un encadrement de celle-ci.

L'algorithme suivant teste si la fonction f change de signe entre deux abscisses x_1 et x_2 de l'intervalle $[0 ; 1]$. Une série de 10 tests est effectuée.

VARIABLES

a , b , p , x_1 , x_2 , y_1 et y_2 sont des nombres

i est un nombre

DÉBUT

a prend la valeur 0

b prend la valeur 1

p prend la valeur $(b - a) / 10$

x_1 prend la valeur a

x_2 prend la valeur $x_1 + p$

POUR i allant de 1 à 10

y_1 prend la valeur $x_1 - \cos(x_1)$

y_2 prend la valeur

 si $y_1 \cdot y_2 < 0$ afficher x_1 et x_2

x_1 prend la valeur $x_1 + p$

x_2 prend la valeur

FIN de la boucle POUR

FIN

Questions

1. Calculer $f'(x)$ et démontrer que cette dérivée est strictement positive sur $[0 ; 1]$
Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution α et une seule sur cet intervalle.
2. Compléter le pseudocode de façon que l'algorithme affiche les bornes de l'intervalle qui contient α en tenant compte des informations suivantes :
 - * p est le pas dont on augmente x_1 et x_2 à chaque itération
 - * i est un compteur
3. Taper et tester l'algorithme avec Algobox. Indiquer l'encadrement de α qui est obtenu.
4. On veut améliorer la précision de la réponse.
Pour cela, on va exécuter trois fois la même boucle POUR comme le suggère le pseudocode suivant :

VARIABLES

a , b , p , x_1 , x_2 , y_1 et y_2 sont des nombres

i et j sont des nombres

DÉBUT

a prend la valeur 0

b prend la valeur 1

POUR j allant de 1 à 3

p prend la valeur

x_1 prend la valeur

x_2 prend la valeur

 POUR i allant de 1 à 10

y_1 prend la valeur

y_2 prend la valeur

SI $y_1*y_2 < 0$ ALORS
 afficher x_1 et x_2
 a prend la valeur x_1
 b prend la valeur x_2
 FIN de l'instruction SI

x_1 prend la valeur $x_1 + p$

x_2 prend la valeur

 FIN de la boucle POUR

FIN de la boucle POUR

FIN

5. Compléter et tester l'algorithme proposé.
 6. Comment l'adapter de façon que l'utilisateur puisse donner au départ la précision souhaitée ?
-