Approximation d'une loi binomiale par la loi normale

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel strictement positif.
Au départ, on suppose $n = 10$ et on étudie l'expérience aléatoire suivante :

- une pièce de monnaie est lancée n fois de suite
- on compte le nombre de fois où on a obtenu « *pile* » au cours des n lancers

Cette expérience aléatoire peut-être simulée par l'algorithme suivant :

```
j , P et X sont des nombres
X prend la valeur 0
POUR j allant de 1 à 10
   P prend la valeur floor(2 *random())
   SI P = 0 ALORS X prend la valeur X + 1
FIN de la boucle POUR
Afficher X
```

Dans cet algorithme, le lancer de la pièce est simulé par le choix d'un nombre entier aléatoire égal à 0 (*pile*) ou à 1 (*face*).
On note désormais X la variable aléatoire égale au nombre de « *pile* » au cours d'une série de n lancers.

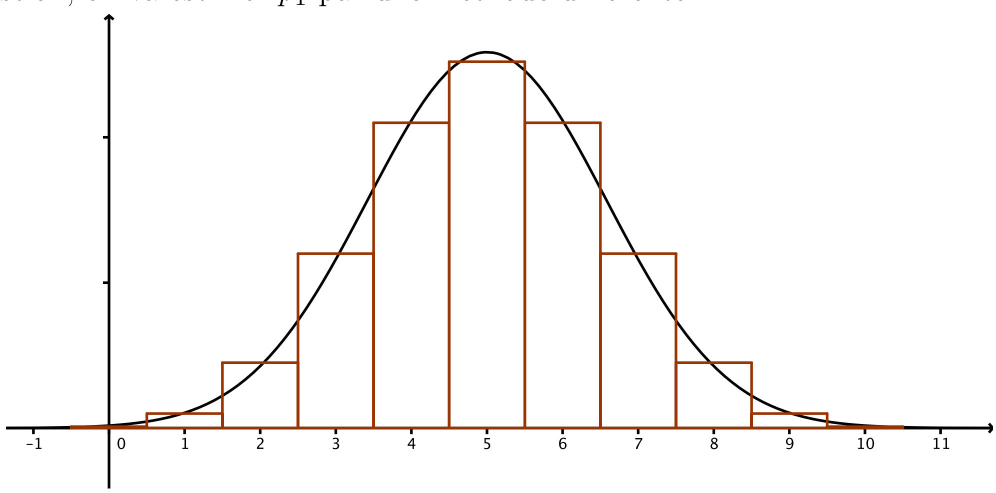
Questions

1. Quelle loi de probabilité est suivie par X ?
En déduire l'espérance μ, la variance V et l'écart-type σ de X.

2. On veut déterminer expérimentalement $p(X = 5)$ en simulant un grand nombre de fois l'expérience initiale. Proposer et tester un algorithme qui réponde à la question.
On pourra utiliser les variables suivantes :
`N` : nombre de simulations (déterminé en entrée par l'utilisateur)
`i` : compteur associé aux simulations (ce compteur est distinct du compteur `j`)
`G` : nombre de cas où X prend la valeur 5
`F` : fréquence associée à l'événement $(X = 5)$ qui doit être affichée en sortie
Indiquer les valeurs obtenues dans un tableau et comparer avec la valeur théorique.

3. Montrer que l'événement $(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ est la réunion des événements $(X = 4)$, $(X = 5)$ et $(X = 6)$.
Adapter l'algorithme précédent pour obtenir une approximation de $p_1 = p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$.
Tester et comparer avec la valeur théorique.

4. Dans cette question, on va estimer p_1 par une méthode différente.



Sur cette figure chaque rectangle a une aire égale à $p(X = k)$ où k est l'abscisse indiquée en-dessous du rectangle.

On a également représenté une fonction f qui « *approche* » le dessin constitué par ces rectangles : cette fonction s'appelle « *la densité de probabilité de la loi normale d'espérance* $\mu = 5$ *et de variance* $\sigma^2 = 2,5$ ».
On démontre qu'une très bonne approximation de p_1 est l'aire sous la courbe de f entre les abscisses $a = \mu - \sigma$ et $b = \mu + \sigma$. On va déterminer l'aire de ce domaine avec différents outils.
Dans chacun des cas considérés, les variables a , b , μ et σ devront être remplacées par leurs valeurs numériques.

a) Lancer **Geogebra** et définir dans la barre de saisie la fonction densité :

`f(x) = Normale[`μ `,` σ `, x]`

Déterminer l'aire sous la courbe entre les bornes indiquées :

`IntégraleDomaine[f , 0 , a , b]`

b) Lancer **Algobox** et définir la fonction numérique :

`F1(x) = ALGOBOX_LOI_NORMALE(`μ `,` σ `, x)`

Cette fonction calcule l'aire sous la courbe de f qui est située à gauche de l'abscisse x.
Il suffit donc dans un algorithme de calculer la probabilité recherchée en écrivant l'instruction :

`p1 prend la valeur F1(b) - F1(a)`

c) Lancer un **tableur** et utiliser la fonction `LOI.NORMALE`
Cette fonction renvoie la valeur de la densité en `x` avec :

`= LOI.NORMALE(x ;` μ `;` σ`)`

La même fonction renvoie l'aire sous la courbe de f qui est située à gauche de l'abscisse x avec :

`= LOI.NORMALE(x ;` μ `;` σ `; 1)`

Il suffit donc de taper dans une cellule du tableur :

`= LOI.NORMALE(b ;` μ `;` σ `; 1) - LOI.NORMALE(a ;` μ `;` σ `; 1)`

d) Vérifier les résultats obtenus avec votre **calculatrice**
TI : utiliser la fonction `normalcdf(a , b ,` μ `,` σ`)`
CASIO : dans le menu `STAT DIST NORM Ncd` préciser les valeurs de `Lower` , `Upper` , σ et μ

5. Application. On lance 100 fois une pièce de monnaie et on note X le nombre de « *pile* ».
En convenant de noter μ l'espérance de X et σ son écart-type, déterminer la probabilité des événements suivants :

$(X \leq 40)$
$(X \geq 90)$
$(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$
$(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$
$(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$

1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,5$
L'espérance est $\mu = n\,p = 5$, la variance est $V = n\,p\,(1-p) = 2,5$ et l'écart-type est $\sigma = \sqrt{2,5} \approx 1,58$

2. Estimation de $p(X = 5)$

```
i , j , P , F , G , N et X sont des nombres
lire N
POUR i allant de 1 à N
   X prend la valeur 0
   POUR j allant de 1 à 10
      P prend la valeur floor(2 *random())
      SI P = 0 ALORS X prend la valeur X + 1
   FIN de la boucle POUR
   SI X = 5 ALORS G prend la valeur G + 1
FIN de la boucle POUR
F prend la valeur G / N
Afficher F
```

Résultats numériques pour l'événement $(X = 5)$.

N	10	100	1 000	10 000
F	0,3	0,231	0,239	0,2495

Remarque : la valeur théorique est $p(X = 5) = \binom{10}{5} 0,5^{10} \approx 0,246$

3. On vérifie $\mu - \sigma \approx 3,42$ et $\mu + \sigma \approx 6,58$. Par conséquent :

$$\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma \iff X = 4 \quad \text{ou} \quad X = 5 \quad \text{ou} \quad X = 6$$

Algorithme permettant d'estimer $p_1 = p(E - \sigma \leq X \leq E + \sigma)$: il suffit de remplacer dans l'algorithme précédent le test

```
X = 5
```

par le test :

```
4 <= X ET X <= 6
```

Résultats numériques pour p_1 :

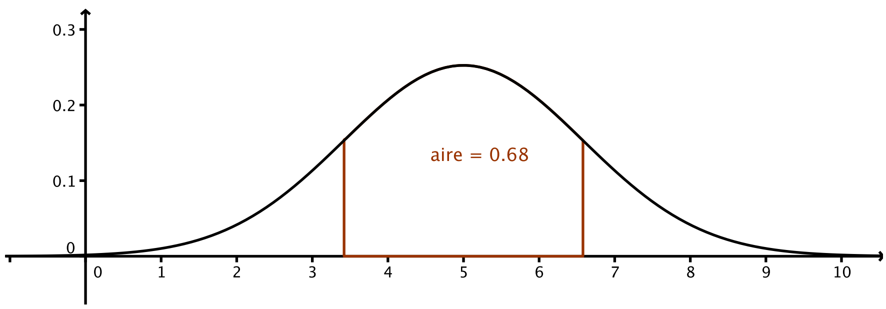
N	10	100	1 000	10 000
F	0,5	0,61	0,668	0,6574

Calcul de la valeur théorique :

$$\begin{aligned} p_1 &= p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 6) \\ &= \binom{10}{4} 0,5^{10} + \binom{10}{5} 0,5^{10} + \binom{10}{6} 0,5^{10} \\ &= 672 \cdot 0,5^{10} \approx 0,656 \end{aligned}$$

4. Approximation par la loi normale.

a) <u>**Geogebra**</u>



b) Algobox

```
...
p prend la valeur F1(5 + 1.58) - F1(5 - 1.58)
afficher p
...
```

Fonction numérique utilisée : `F1(x) = ALGOBOX_LOI_NORMALE(5 , 1.58 , x)`

c) Tableur : OpenOffice

```
= LOI.NORMALE(6,58 ; 5 ; 1,58 ; 1) - LOI.NORMALE(3,42 ; 5 ; 1,58 ; 1)
```

d) Calculatrices

TI : `normalcdf(3.42 , 6.58 , 5 , 1.58)`
CASIO : renseigner `Lower Upper` σ μ dans le menu `Normal C.D.` et calculer

5. Application au cas de 100 lancers. Dans ce cas :
l'espérance est $\mu = 100 \times 0,5 = 50$
la variance est $V = 100 \times 0,5 \times 0,5 = 25$
l'écart-type est $\sigma = \sqrt{25} = 5$
Les résultats suivants ont été obtenus avec un tableur :
$p(X \leq 40) = 0,02275$
$p(X \geq 90) = 0$
$p(45 \leq X \leq 55) = 0,68269$
$p(40 \leq X \leq 60) = 0,95450$
$p(35 \leq X \leq 65) = 0,99730$
